

Filtrage spectral



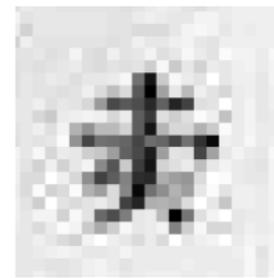
GIF-4105/7105 Photographie Algorithmique, Hiver 2018
Jean-François Lalonde

Administration

- TP1: comment ça été?
- TP2: disponible aujourd'hui!
 - À remettre le 15 février (dans 2 semaines) @ 23h59
 - On s'en reparle à la fin du cours

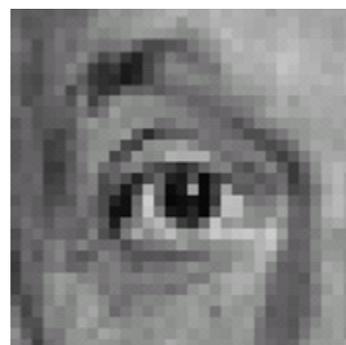
La semaine dernière...

- Une image est une matrice de nombres
 - Souvent mieux de travailler sur la luminance
- Opérations sur les pixels
 - Égalisation d'histogramme
- Filtrage linéaire
 - Peut adoucir, accentuer, identifier les arrêtes horizontales/verticales



=

0.9	0.93	0.94	0.97	0.62	0.37	0.85	0.97	0.93	0.92	0.9
0.9	0.89	0.82	0.89	0.56	0.31	0.75	0.92	0.81	0.95	0.9
0.8	0.72	0.51	0.55	0.51	0.42	0.57	0.41	0.49	0.91	0.9
0.9	0.95	0.88	0.94	0.56	0.46	0.91	0.87	0.90	0.97	0.9
0.7	0.81	0.81	0.87	0.57	0.37	0.80	0.88	0.89	0.79	0.8
0.4	0.62	0.60	0.58	0.50	0.60	0.58	0.50	0.61	0.45	0.3
0.8	0.84	0.74	0.58	0.51	0.39	0.73	0.92	0.91	0.49	0.7
0.9	0.67	0.54	0.85	0.48	0.37	0.88	0.90	0.94	0.82	0.9
0.6	0.49	0.56	0.66	0.43	0.42	0.77	0.73	0.71	0.90	0.9
0.7	0.73	0.90	0.67	0.33	0.61	0.69	0.79	0.73	0.93	0.9
0.9	0.94	0.89	0.49	0.41	0.78	0.78	0.77	0.89	0.99	0.9



3

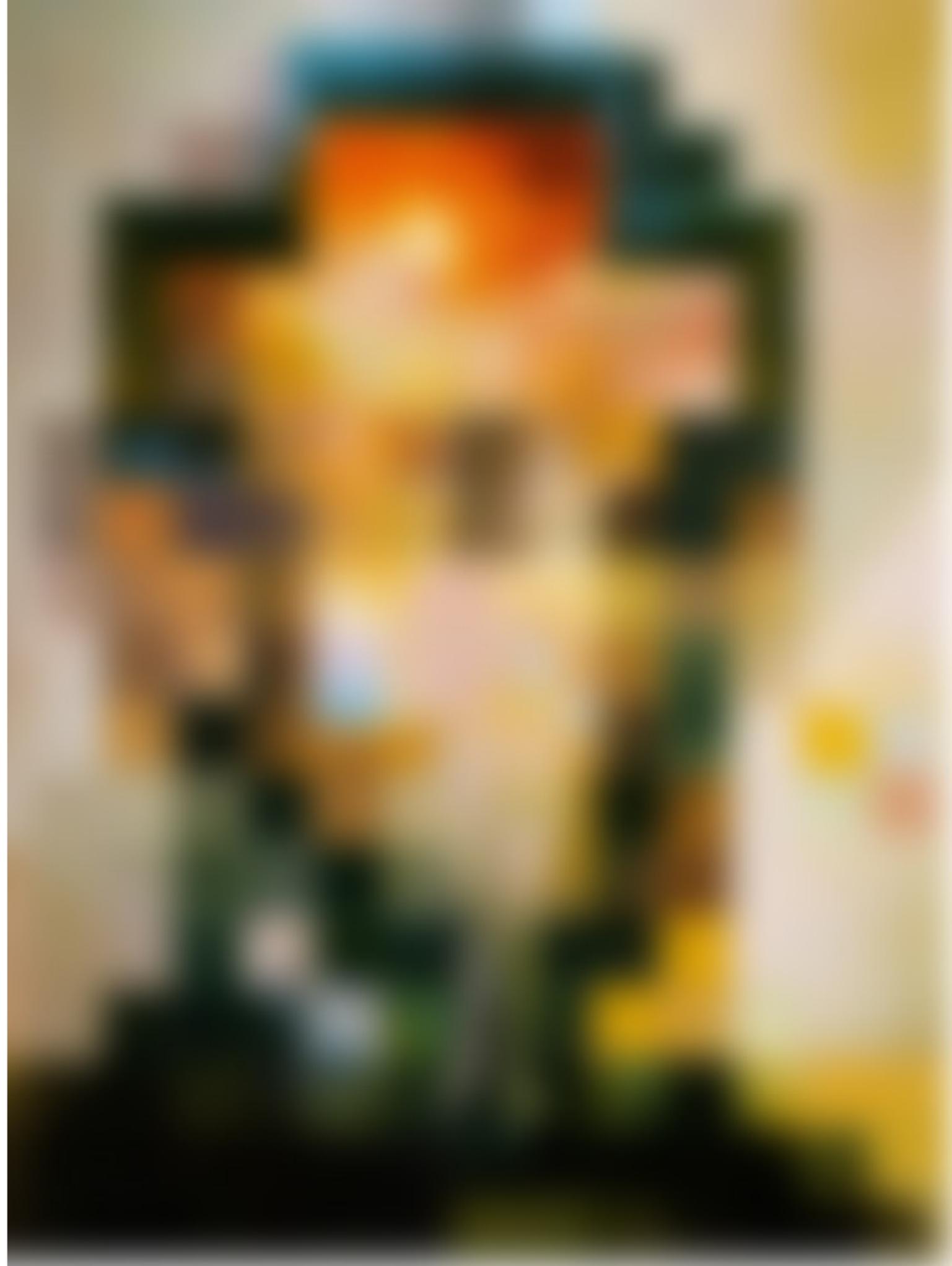
$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

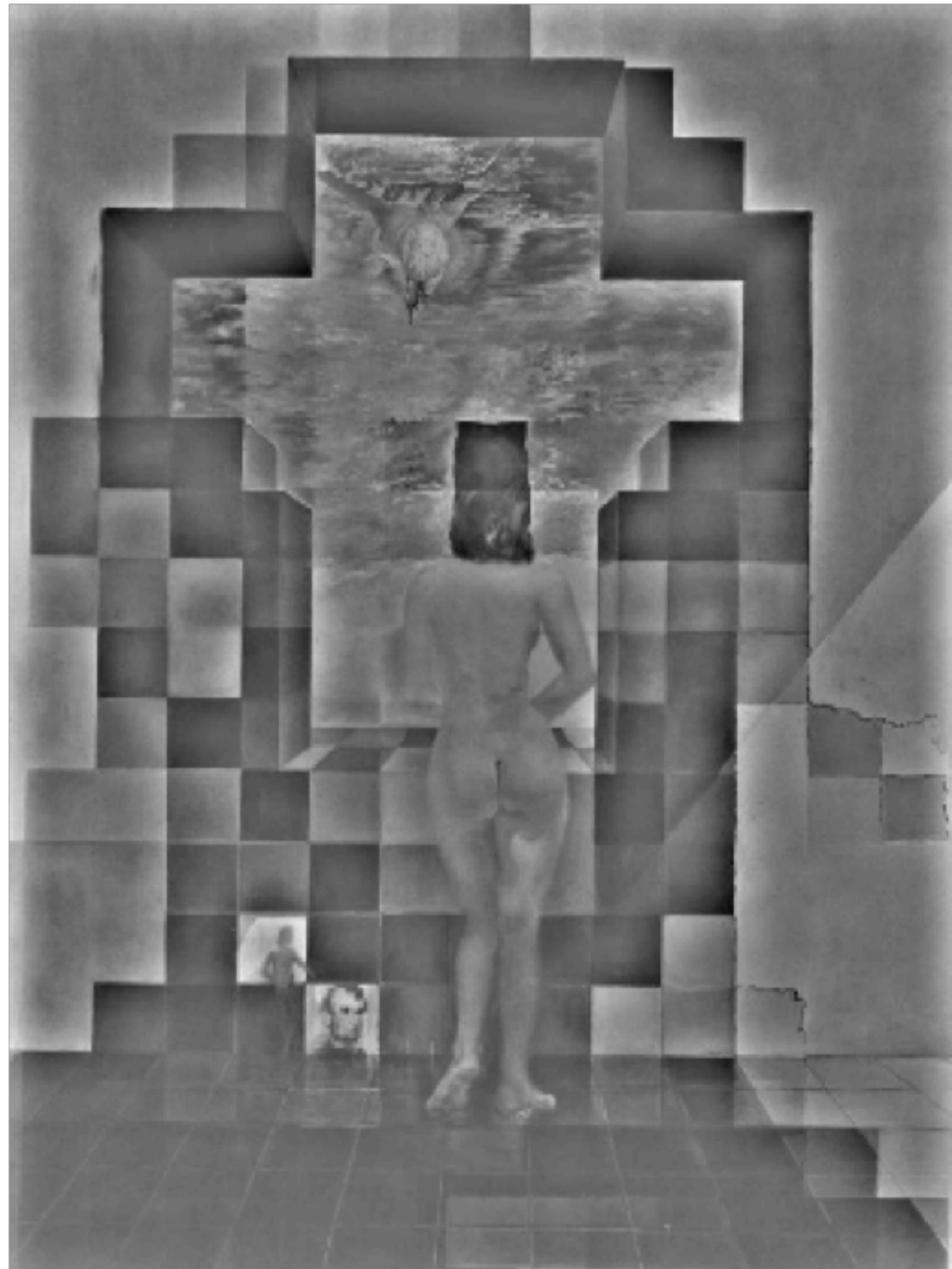
Aujourd'hui

- La transformée de Fourier et le domaine spectral
 - Autre dimension du filtrage: domaine spectral
 - Échantillonnage
 - Applications du filtrage

Salvador Dali
“Gala contemplant la mer Méditerranée qui à
vingt mètres devient le portrait d'Abraham
Lincoln ”, 1976

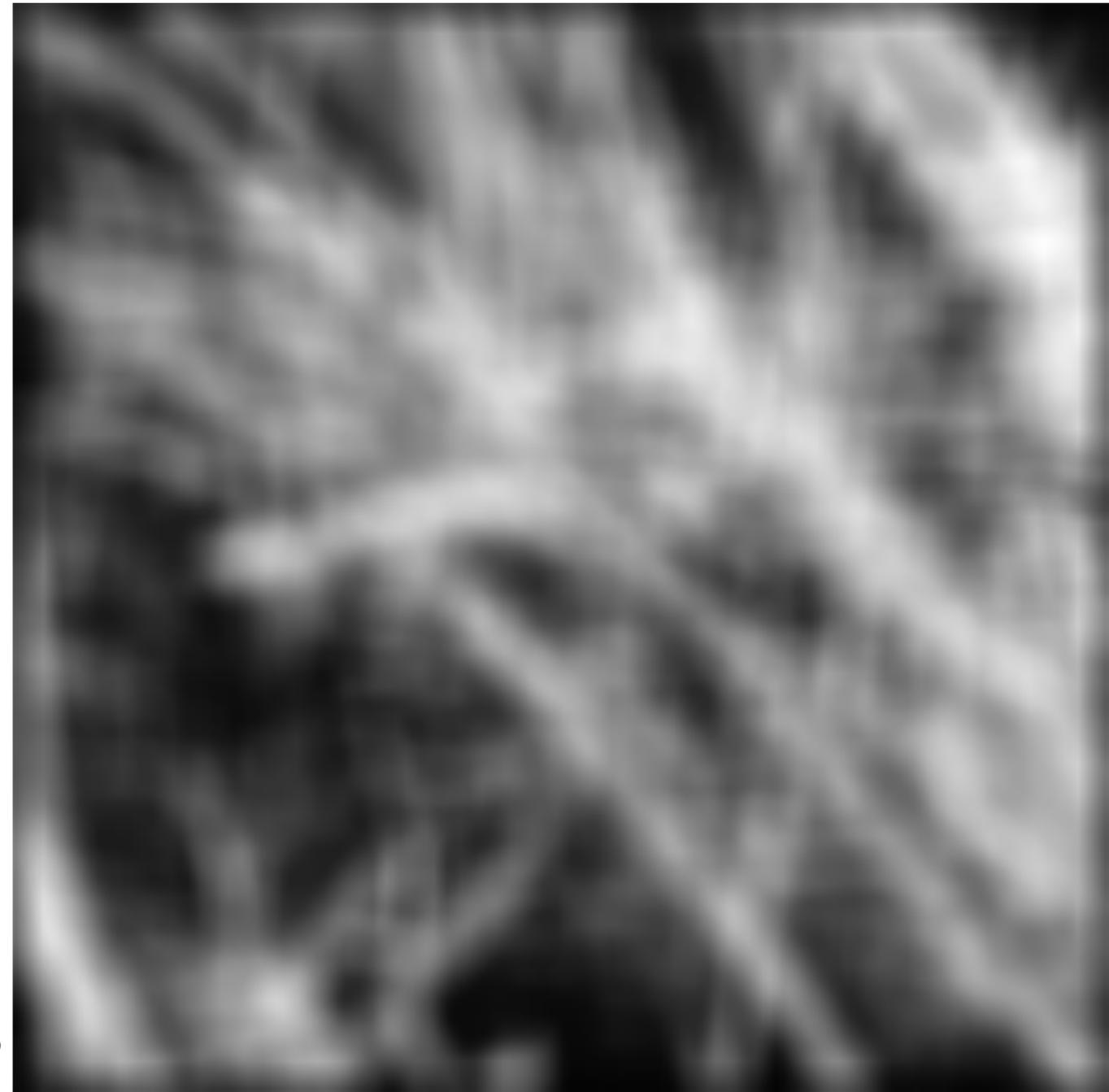
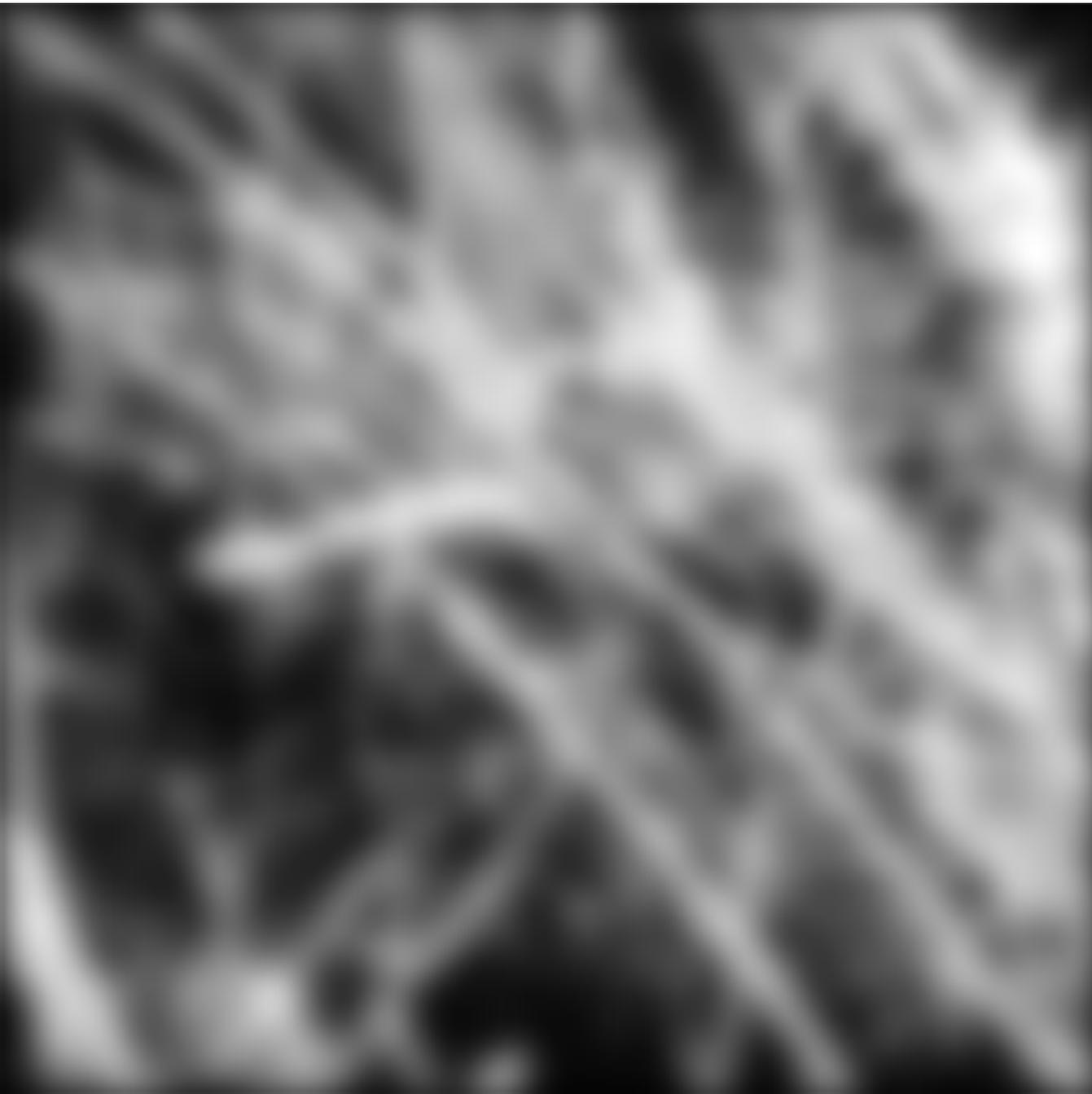
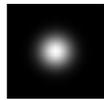








Pourquoi le filtre gaussien nous donne une image lisse,
mais pas le filtre boîte?



Pourquoi une image à plus faible résolution est toujours compréhensible?
Quelle est l'information perdue?

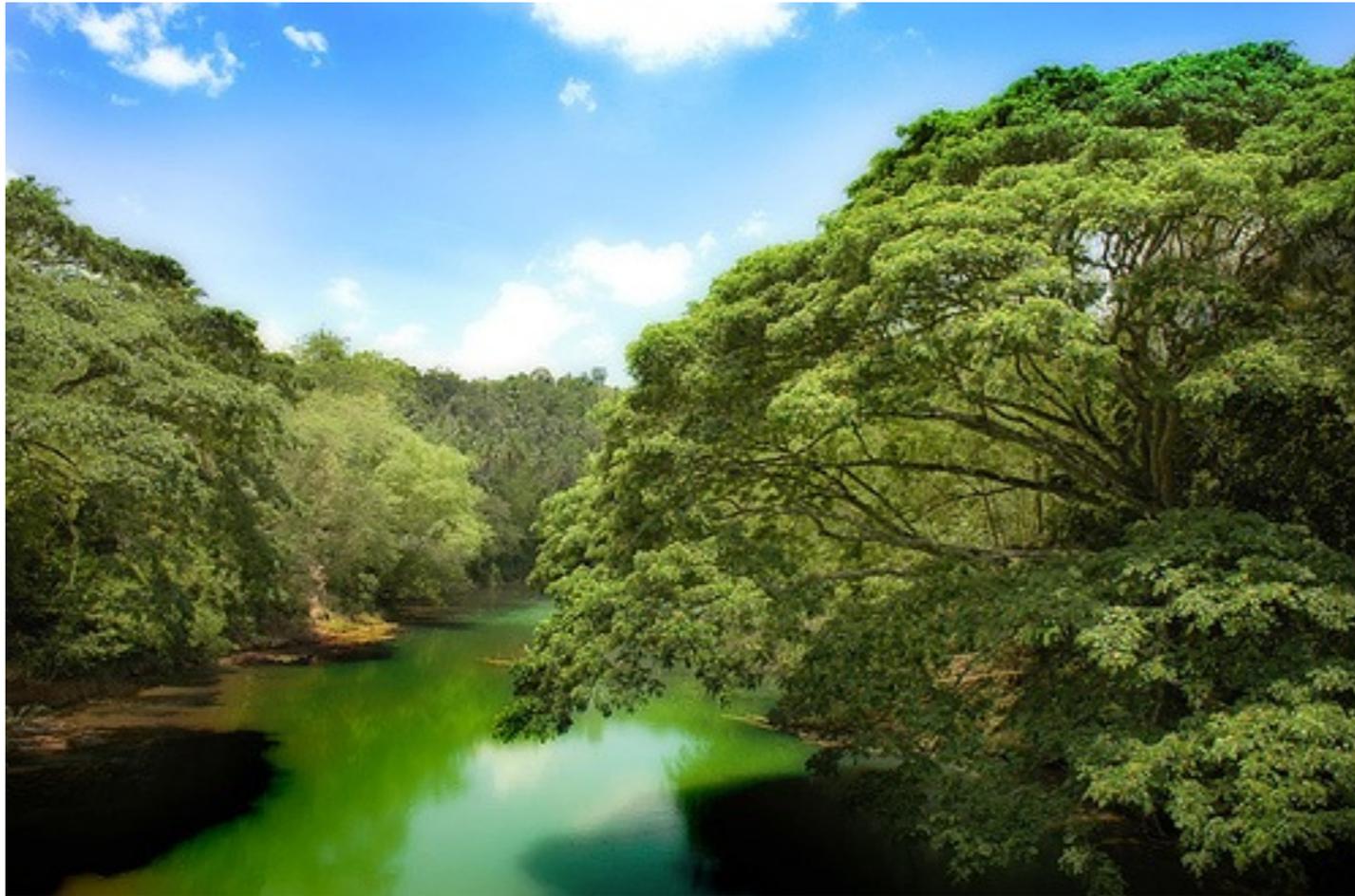


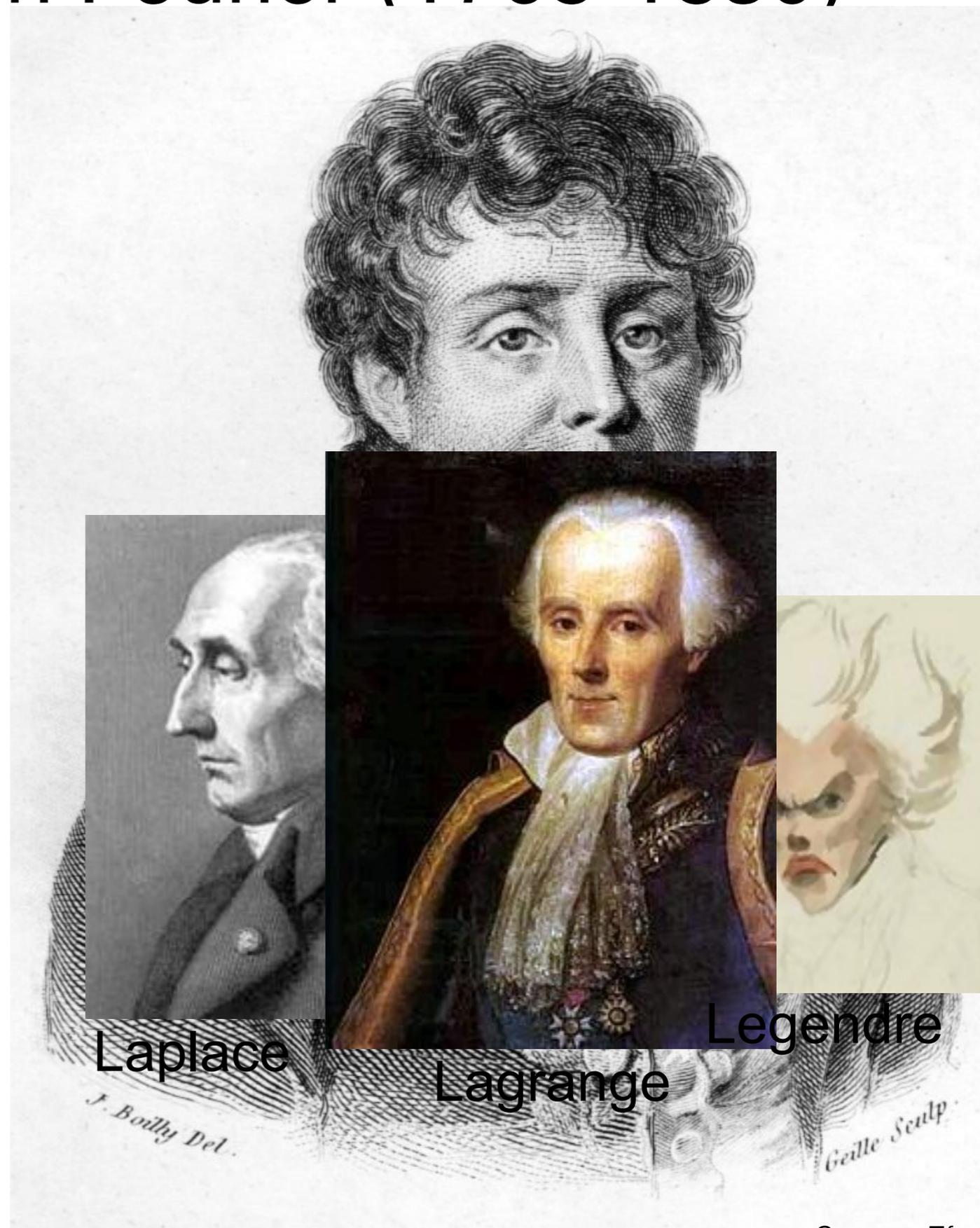
Image: <http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/>

La transformée de Fourier

(sans se faire mal)

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

- a eu une idée révolutionnaire (1807):
 - Toute fonction peut être écrite comme une somme pondérée de sinus et cosinus de différentes fréquences
- Vous n'y croyez pas?
 - Lagrange, Laplace, Legendre et autres non plus!
 - Pas traduit en anglais jusqu'à 1878!



La transformée de Fourier

- Toute fonction peut être écrite comme une somme pondérée de sinus de différentes fréquences

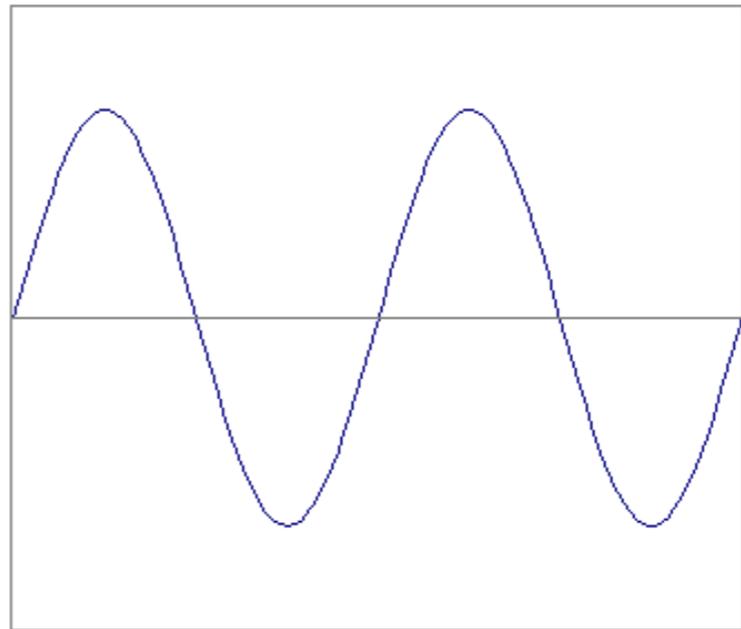
Notre “unité” de base:

$$A \sin(\omega x + \phi)$$

↑
amplitude

↑
fréquence

↑
phase



Qu'est-ce qui contrôle
- la structure générale?
- les détails?

La transformée de Fourier

- Nous voulons comprendre la fréquence ω de notre signal.
- Exprimons alors le signal avec ω au lieu de x :



- représente la magnitude et la phase à chaque fréquence
 - Magnitude: “quantité” de signal à chaque fréquence
 - Phase: translation horizontale

La transformée de Fourier

- $F(\omega)$ représente l'amplitude *et* la phase du signal
 - Comment faire pour représenter ces deux informations?
 - On utilise les nombres complexes

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega)$$

- Où l'amplitude est: $A = \pm \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}$
- Et la phase: $\Phi = \tan^{-1} \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$

Transformée de Fourier

- Directe



- Inverse



Calculer la transformée de Fourier

Continue

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-j\omega x} dx$$

Discrète

$$H(k) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} h(x)e^{-j\frac{2\pi kx}{N}}$$

$k=-N/2..N/2$

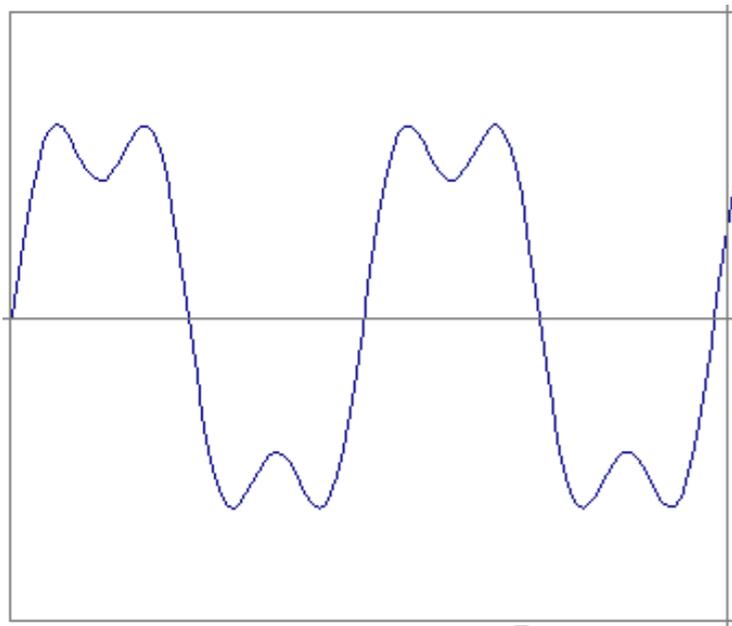


(pour s'en souvenir)

Pour la calculer, on utilise l'algorithme « Fast Fourier Transform (FFT) », $O(N \log N)$

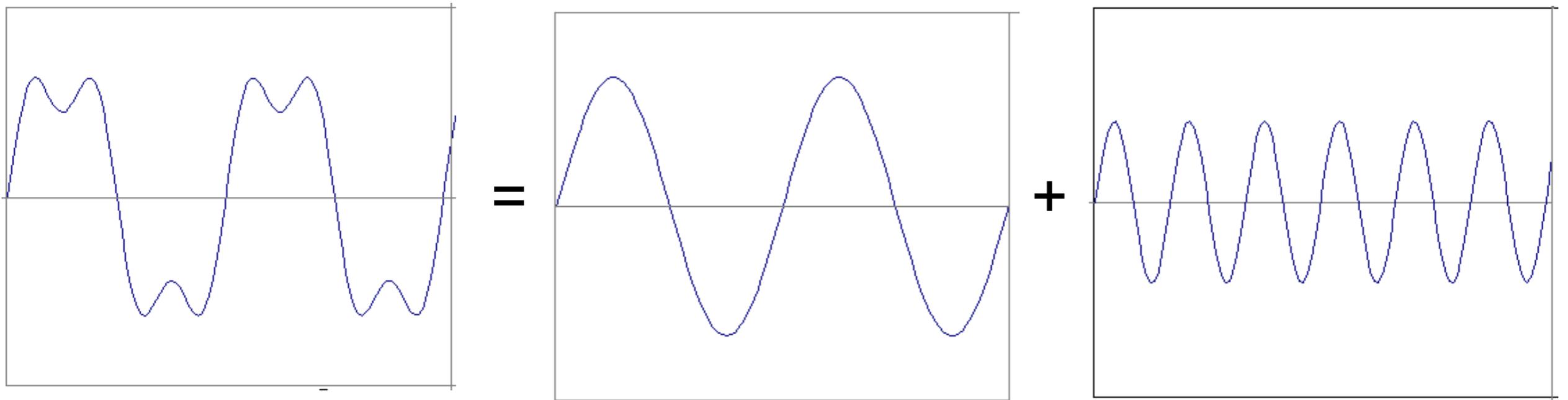
Spectre en fréquences

exemple : $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$



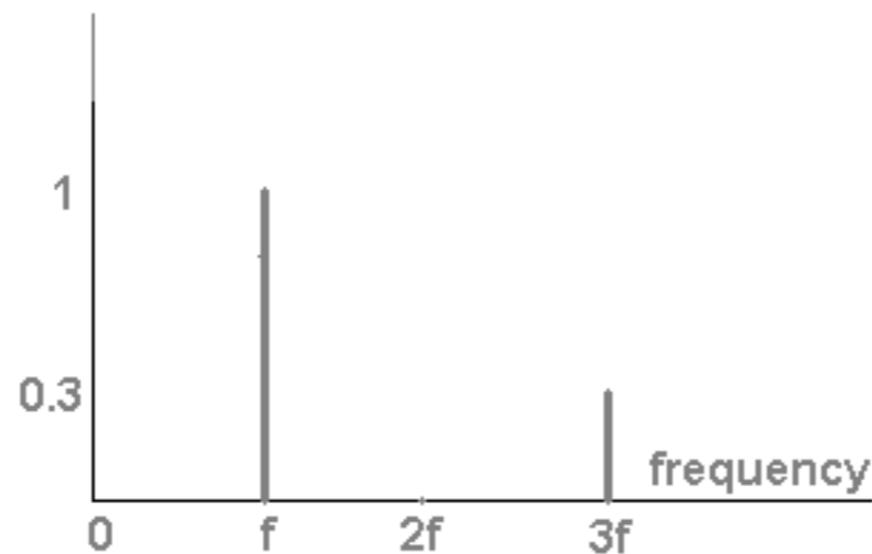
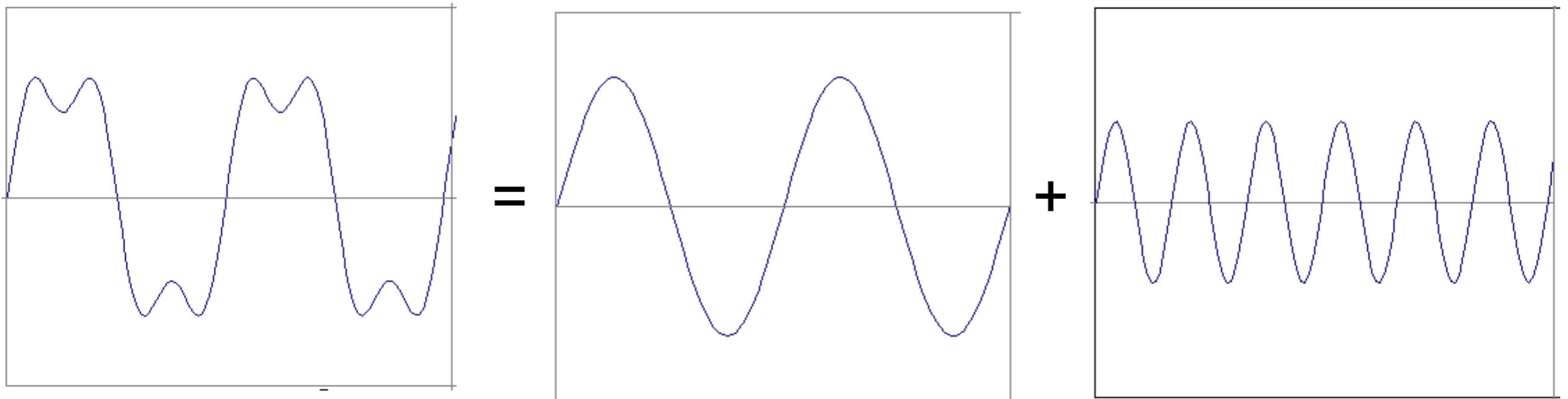
Spectre en fréquences

exemple : $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$

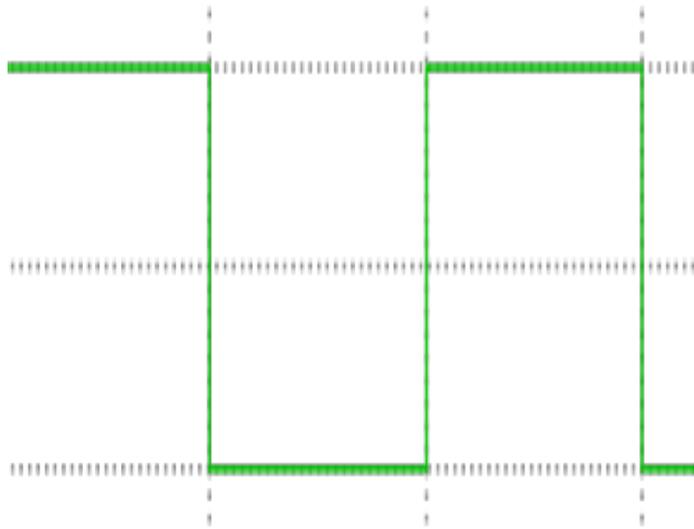


Spectre en fréquences

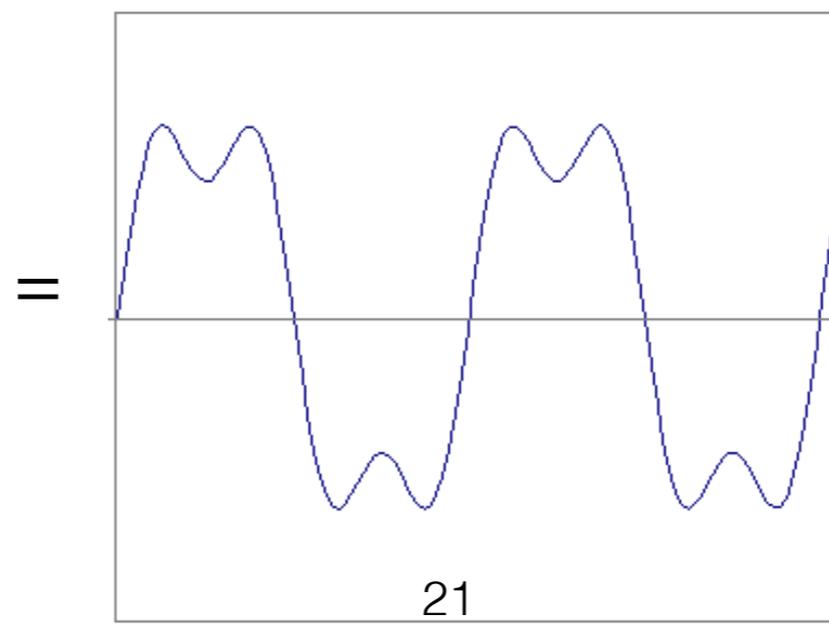
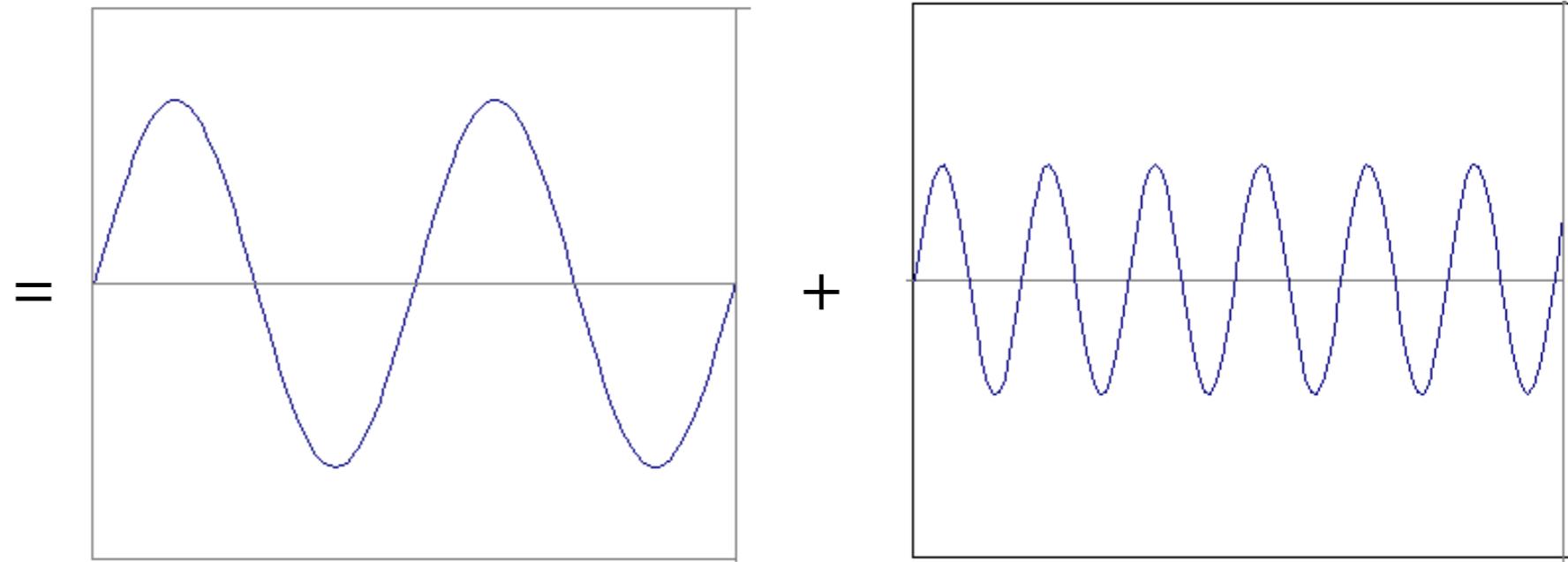
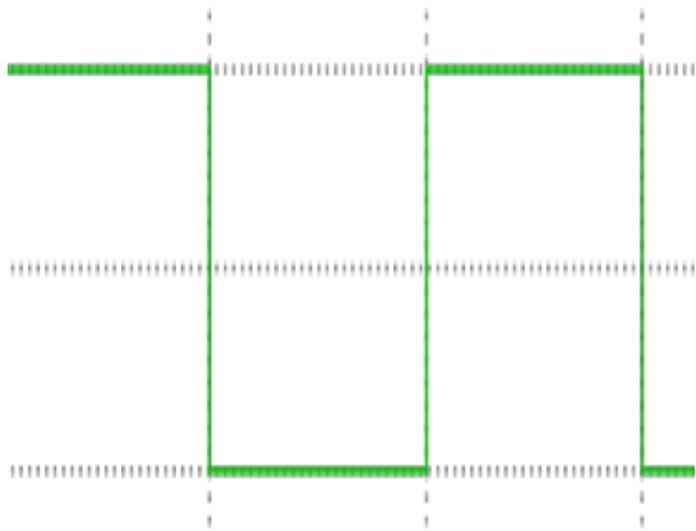
exemple : $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$



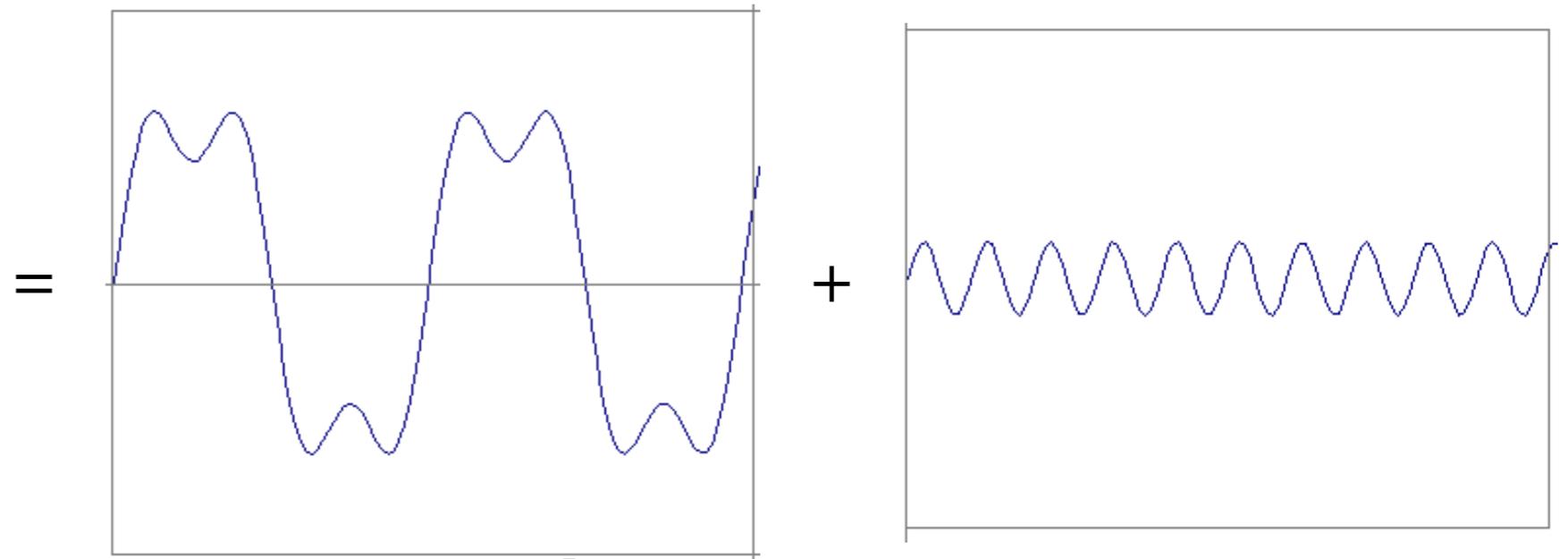
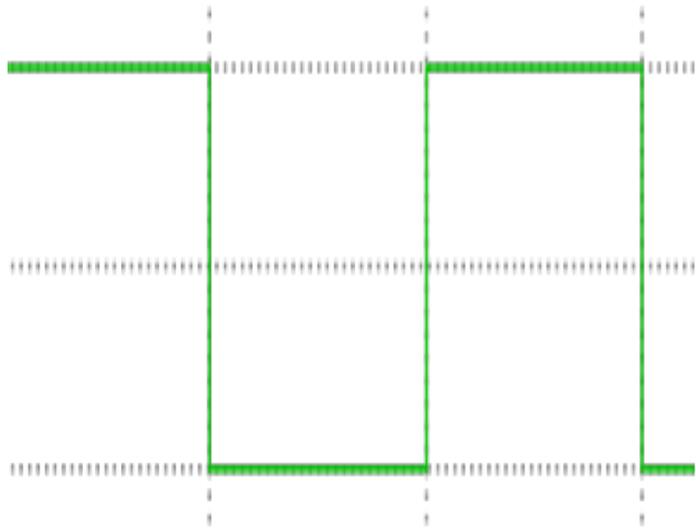
Spectre en fréquences



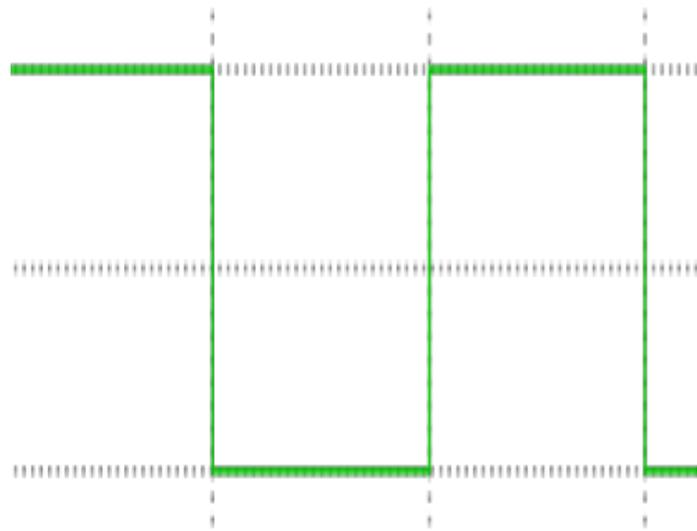
Spectre en fréquences



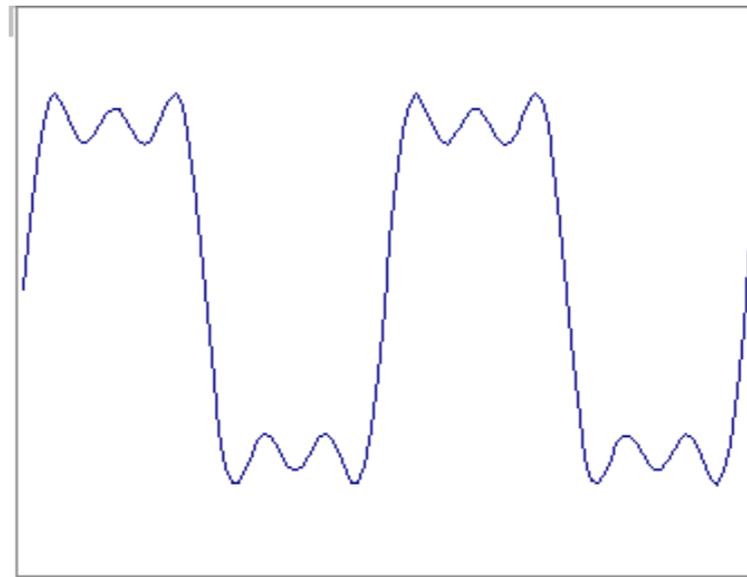
Spectre en fréquences



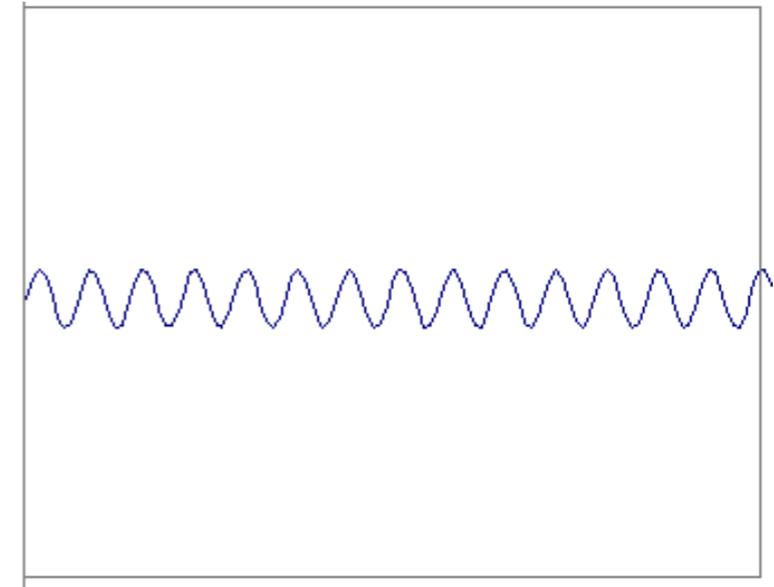
Spectre en fréquences



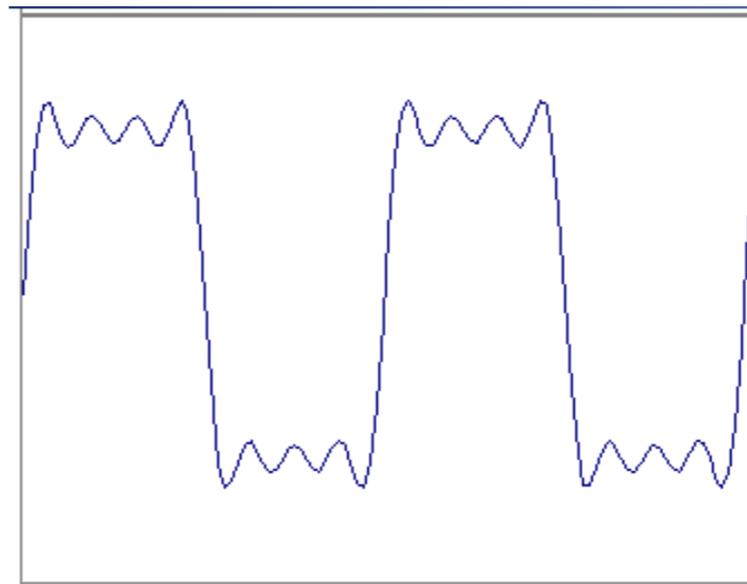
=



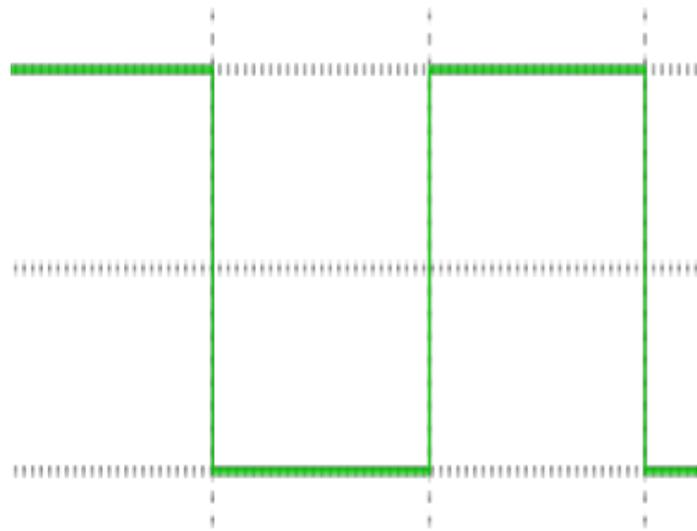
+



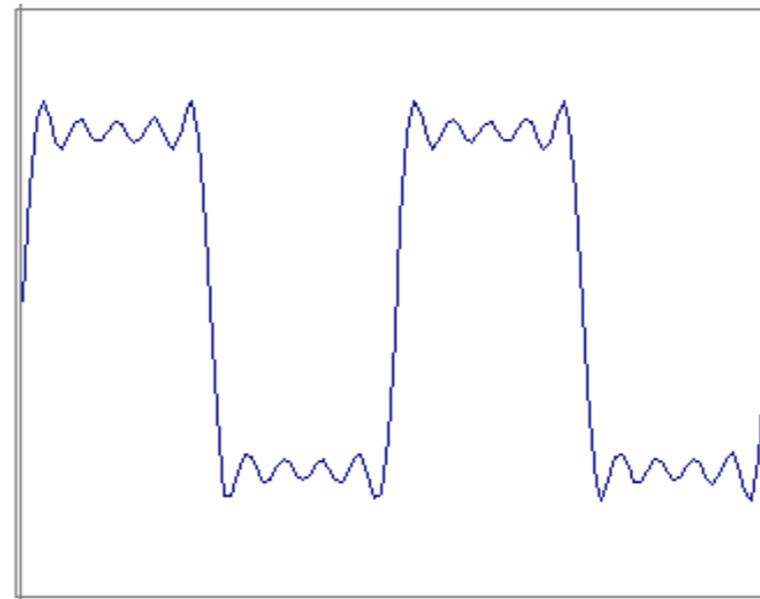
=



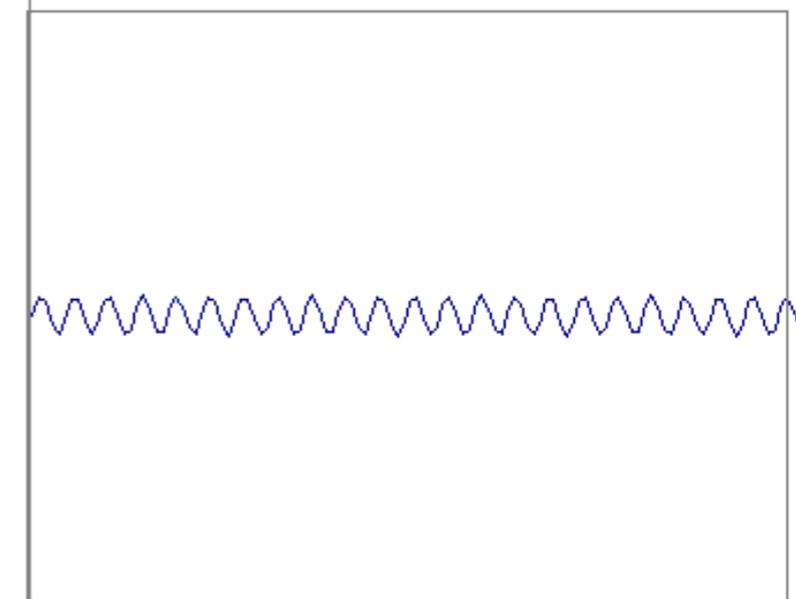
Spectre en fréquences



=



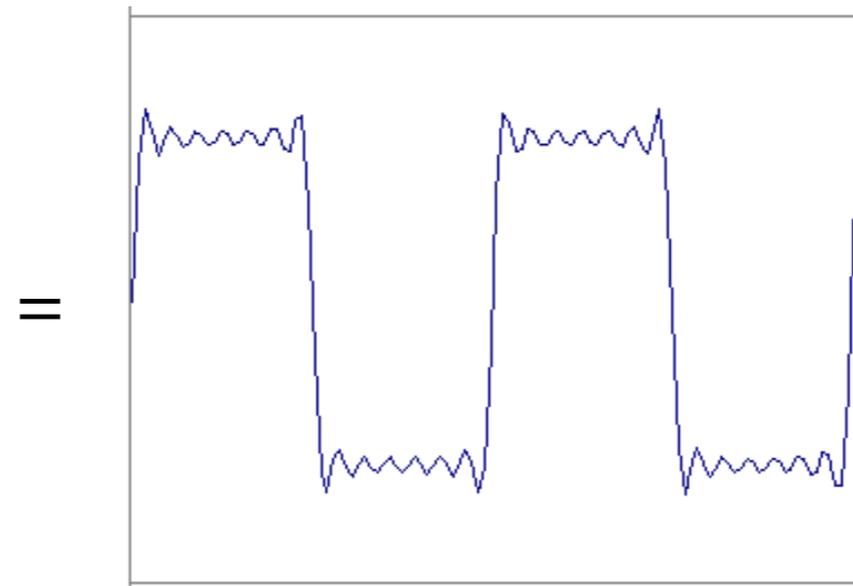
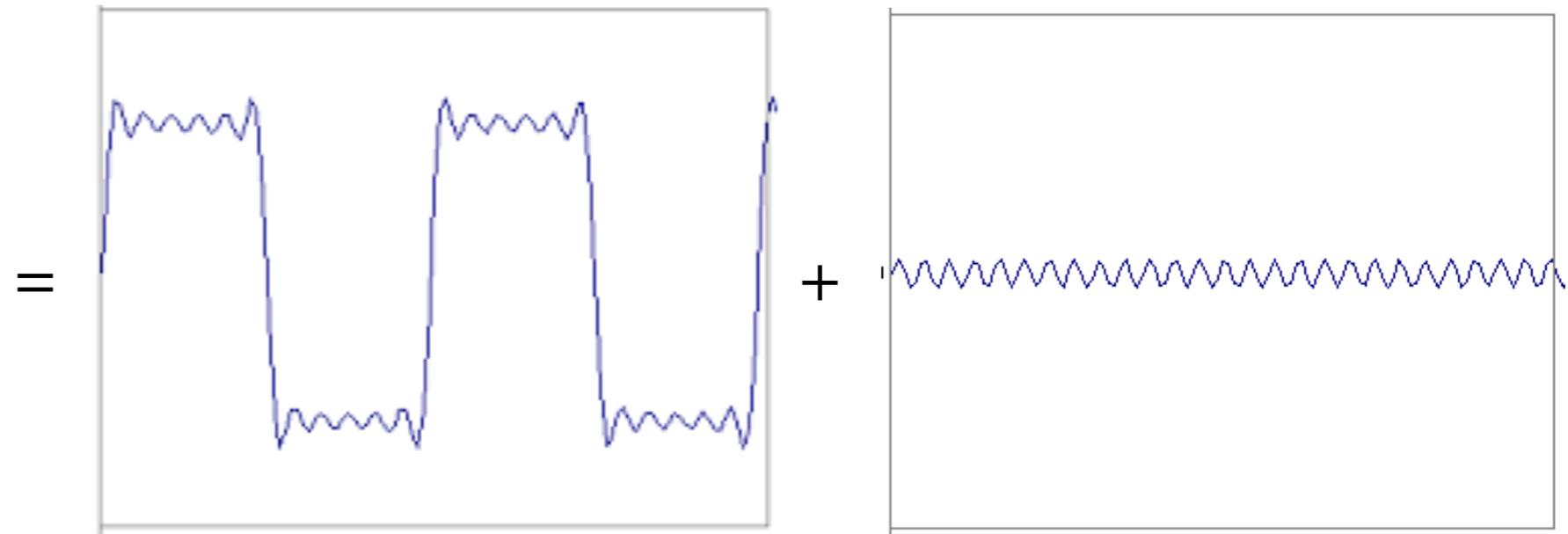
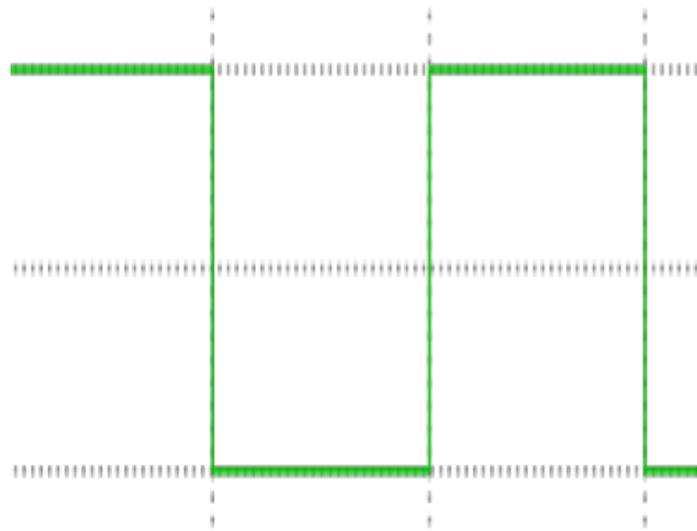
+



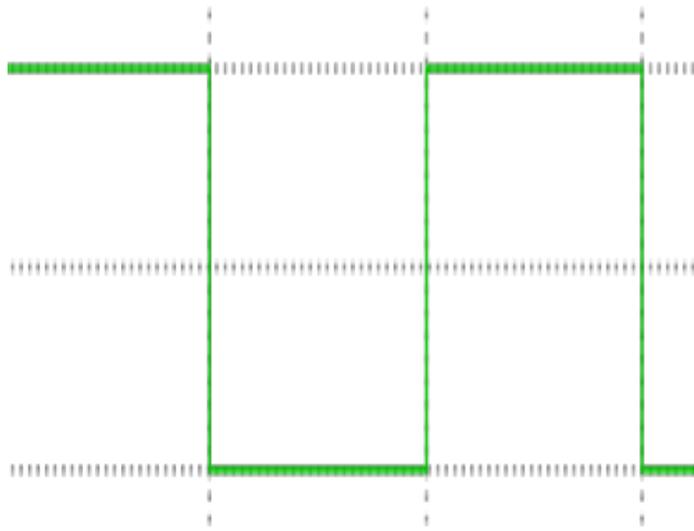
=



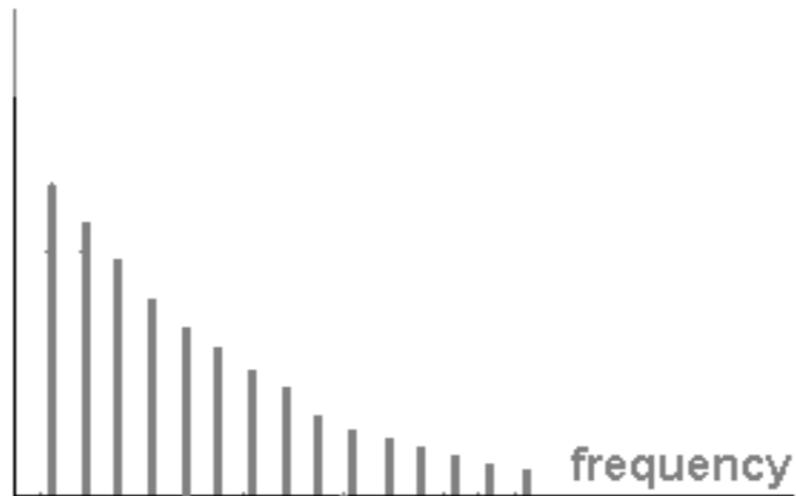
Spectre en fréquences



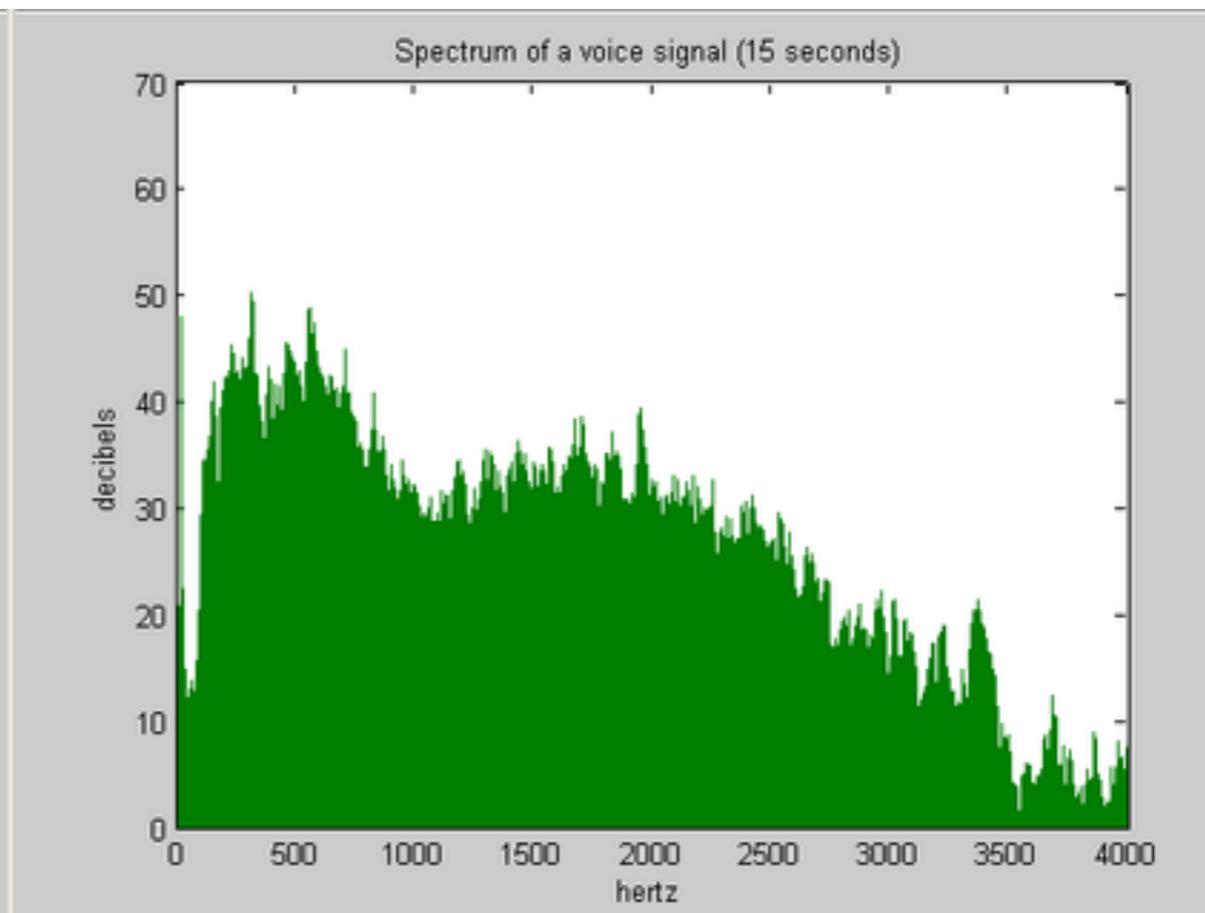
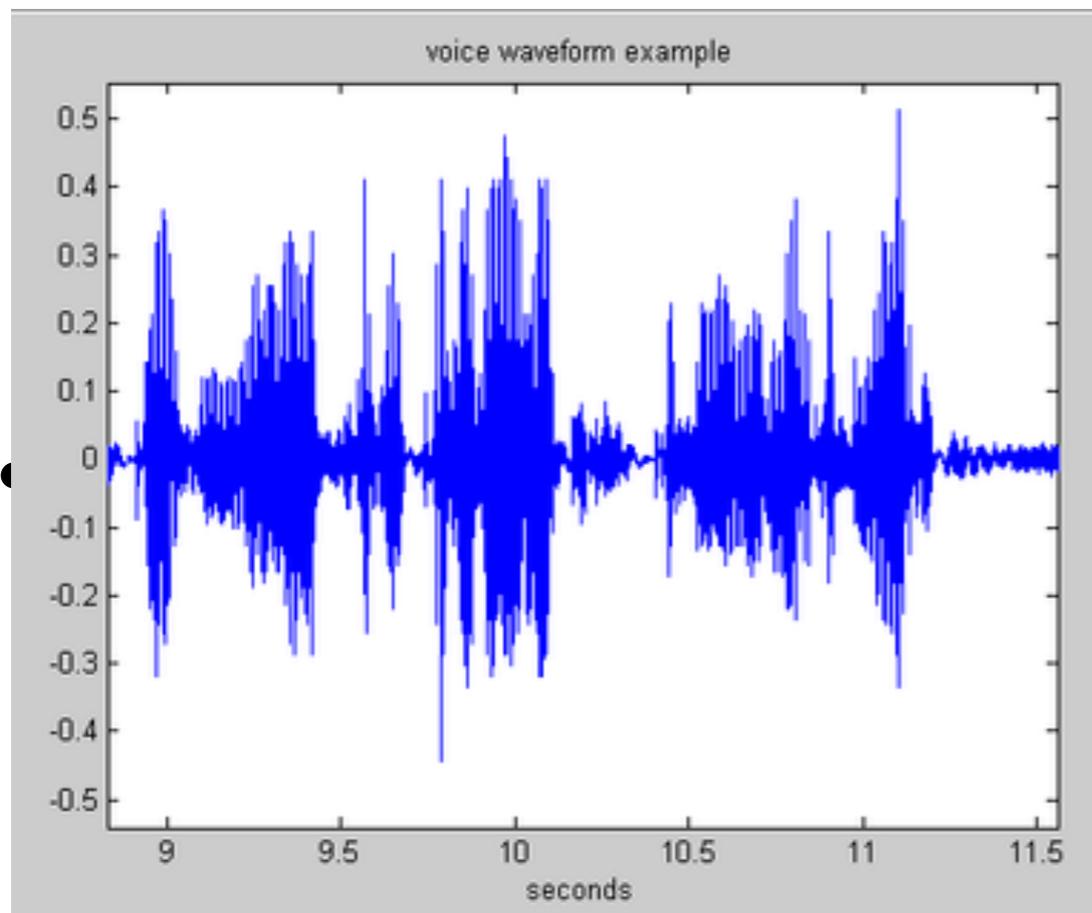
Spectre en fréquences



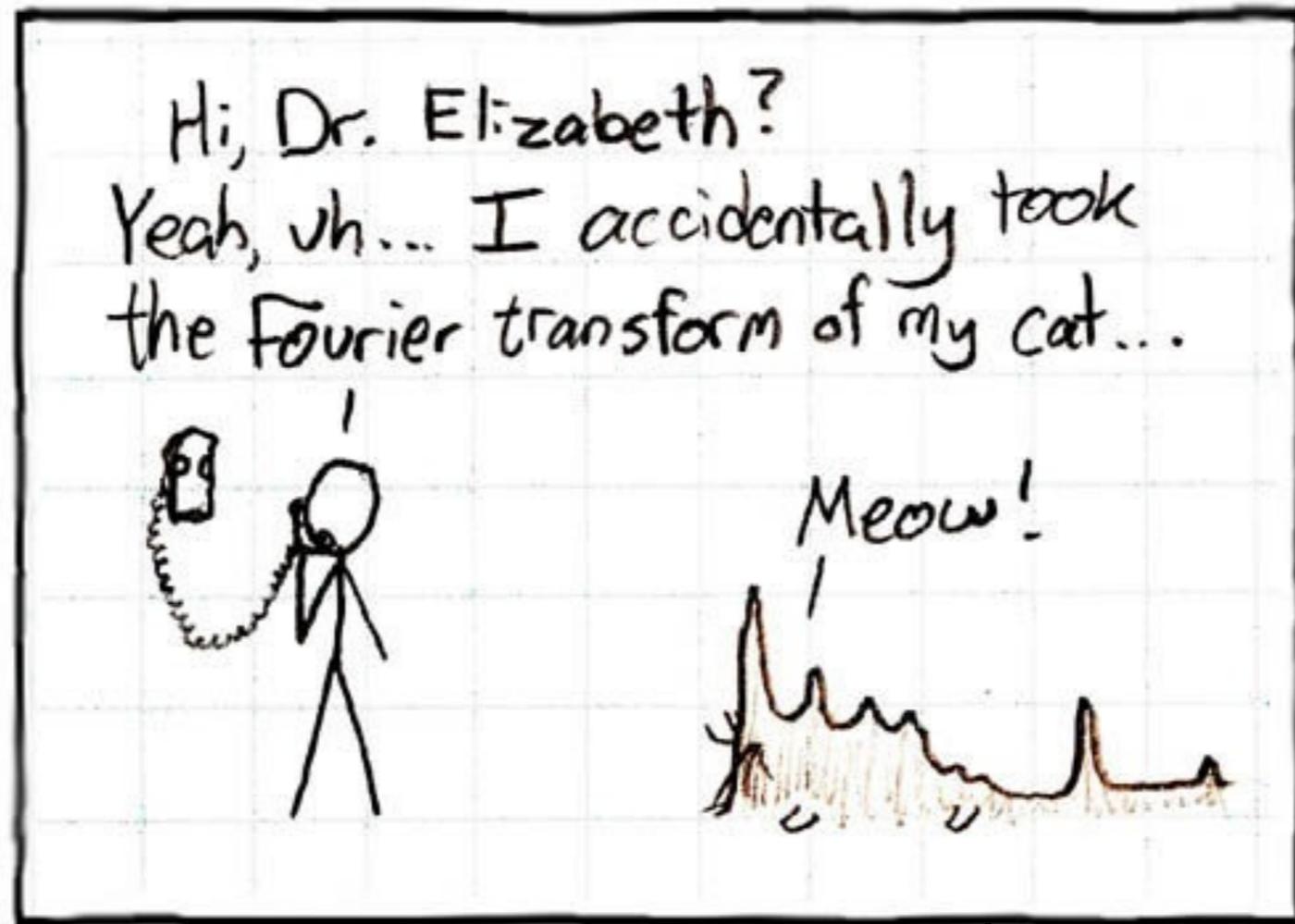
$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi kt)$$



Example: musique

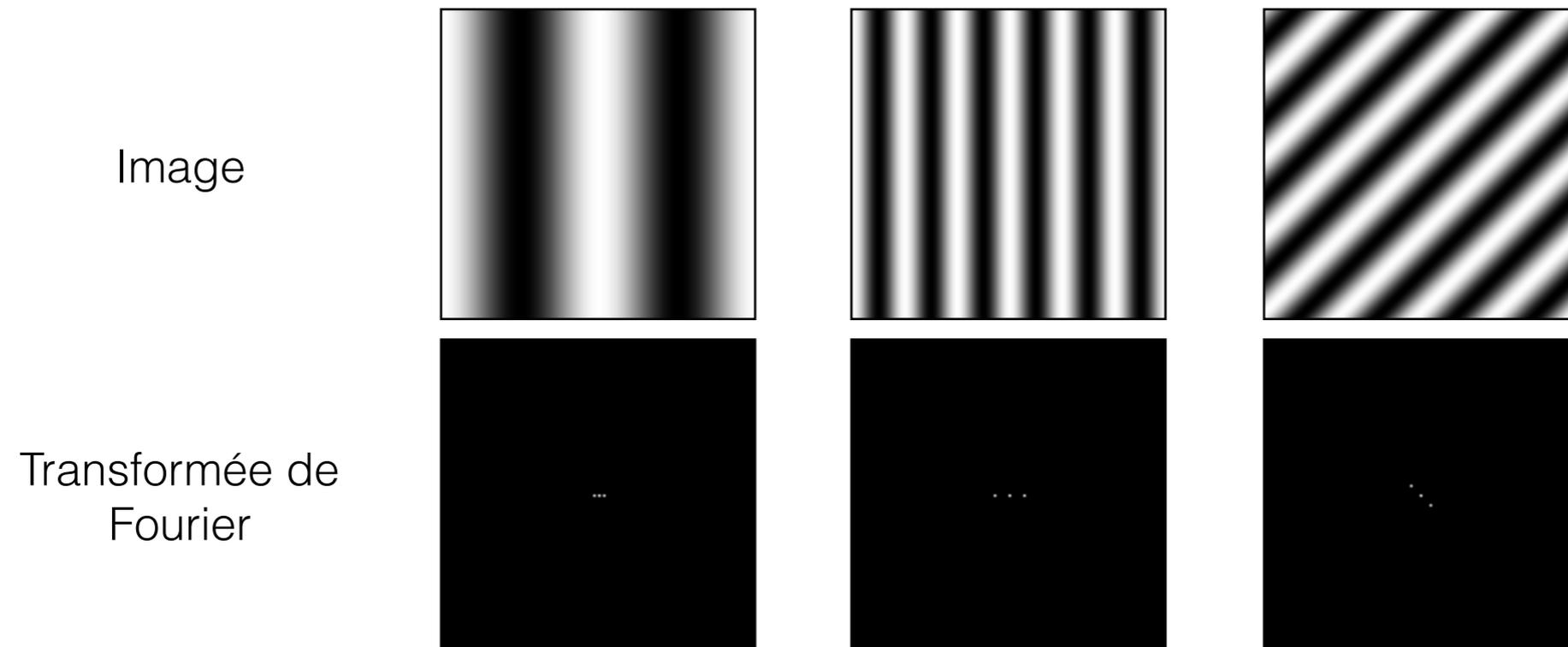


Autres signaux

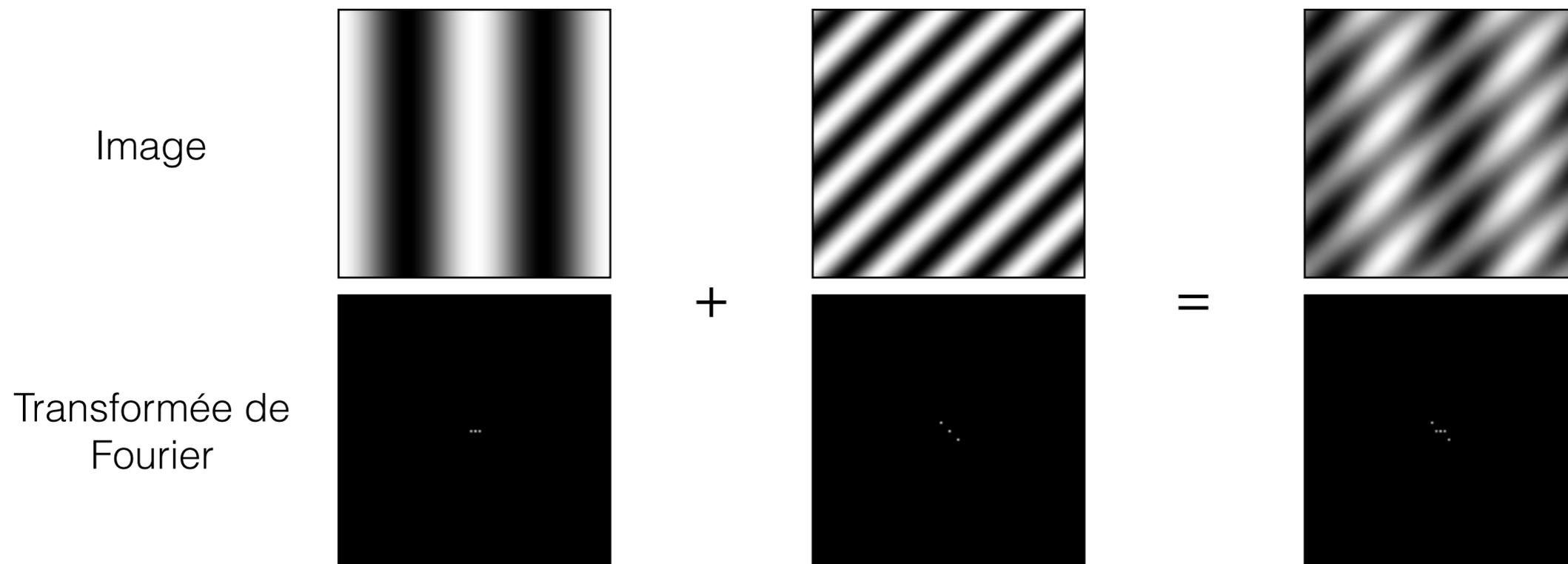


xkcd.com

Transformée de Fourier dans les images

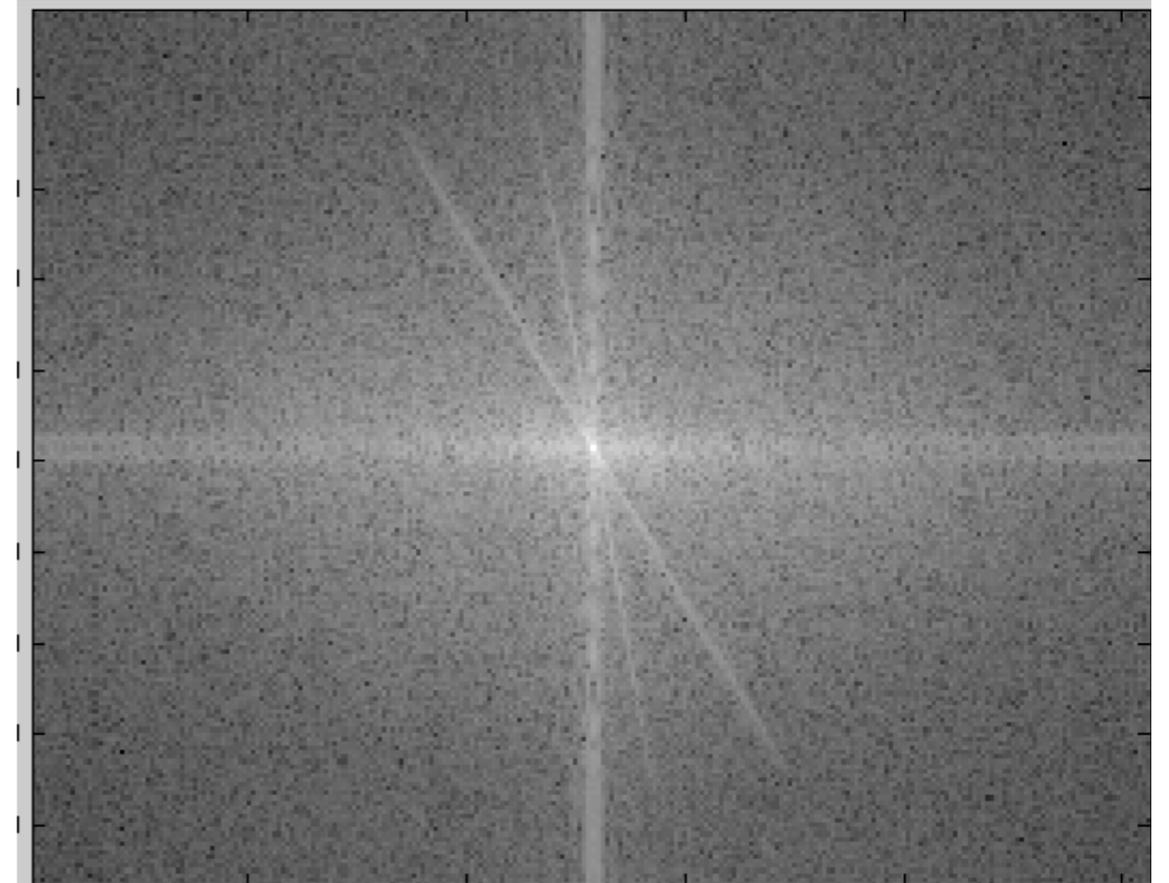


On peut composer les images



Démonstration

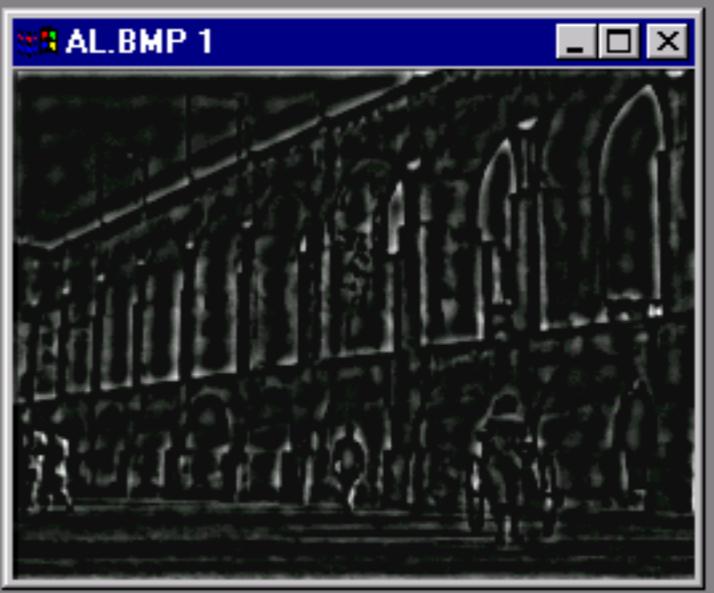
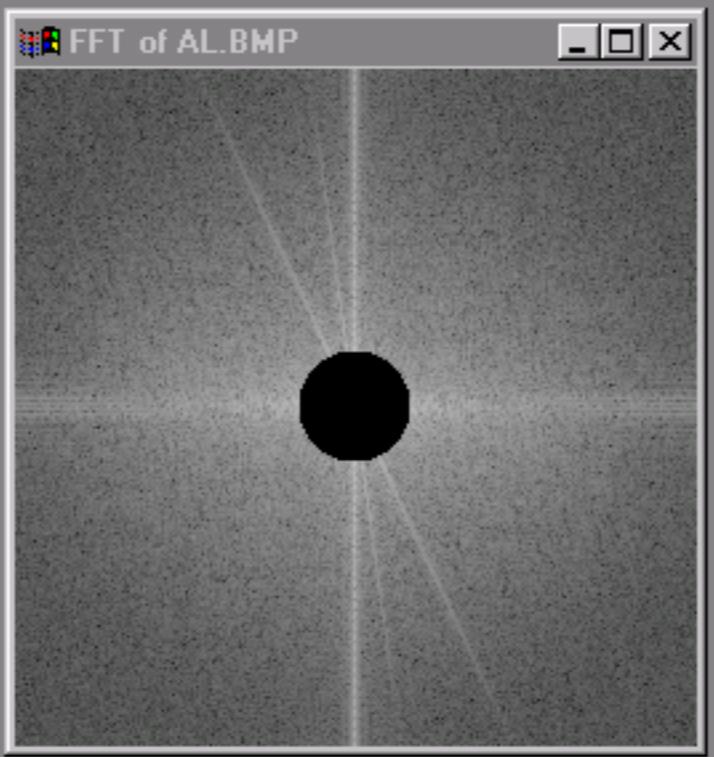
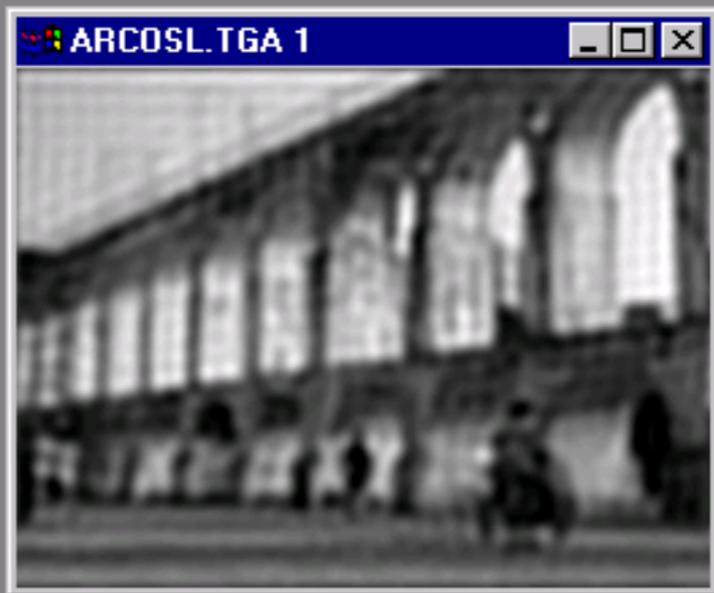
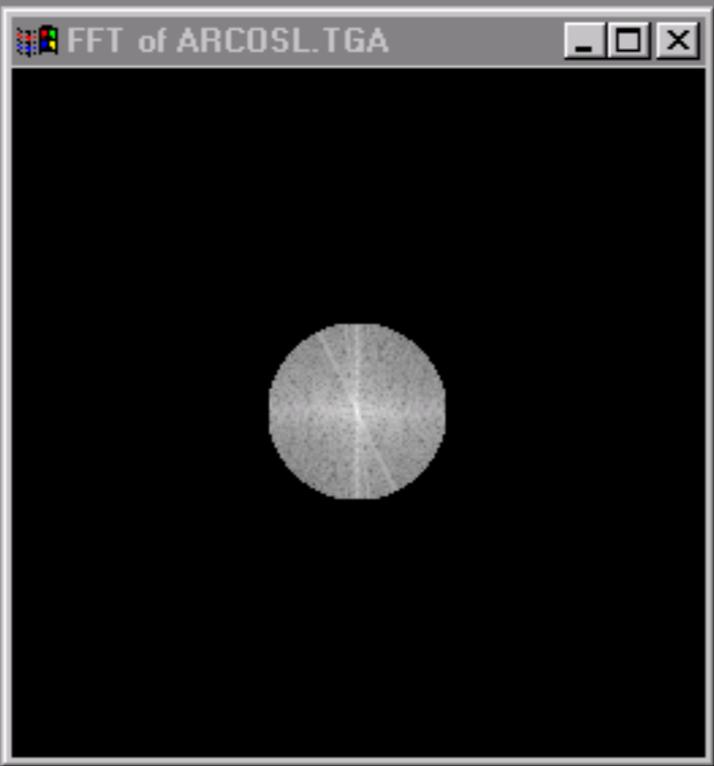
Calculer une FFT



Démonstration

Manipulation de la FFT





Le théorème de la convolution

- La transformée de Fourier d'une convolution de deux fonctions est le produit de leur transformée de Fourier

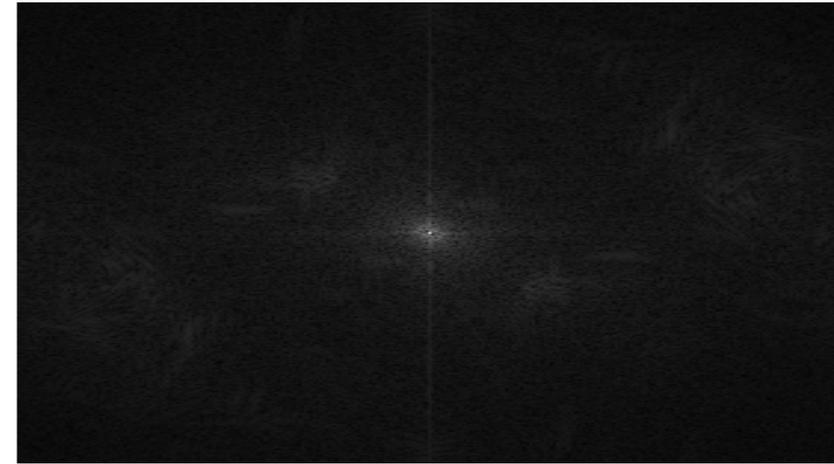
$$F(g * h) = F(g)F(h)$$

- La convolution dans le domaine spatial est équivalent à la multiplication dans le domaine spectral

Domaine spatial
convolution

Domaine spectral (des fréquences)
multiplication

$f(x,y)$

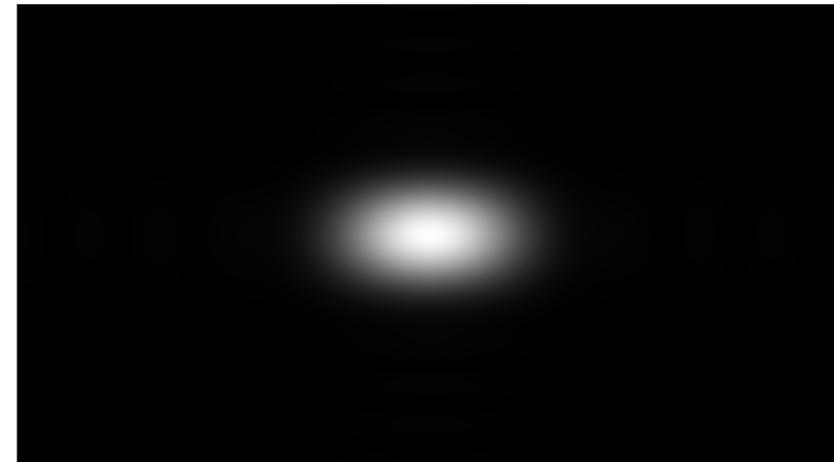
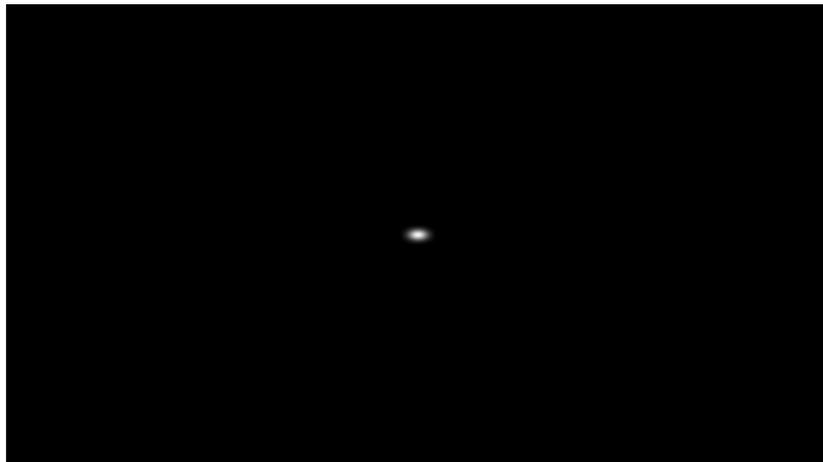


$|F(s_x,s_y)|$

*

x

$h(x,y)$

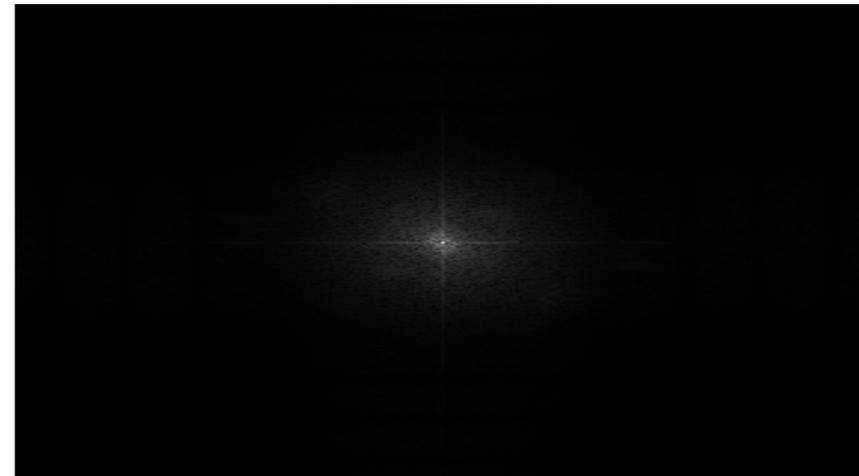


$|H(s_x,s_y)|$

⇓

⇓

$g(x,y)$



$|G(s_x,s_y)|$

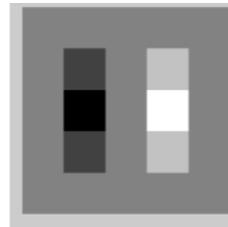
Filterage spatial

1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1

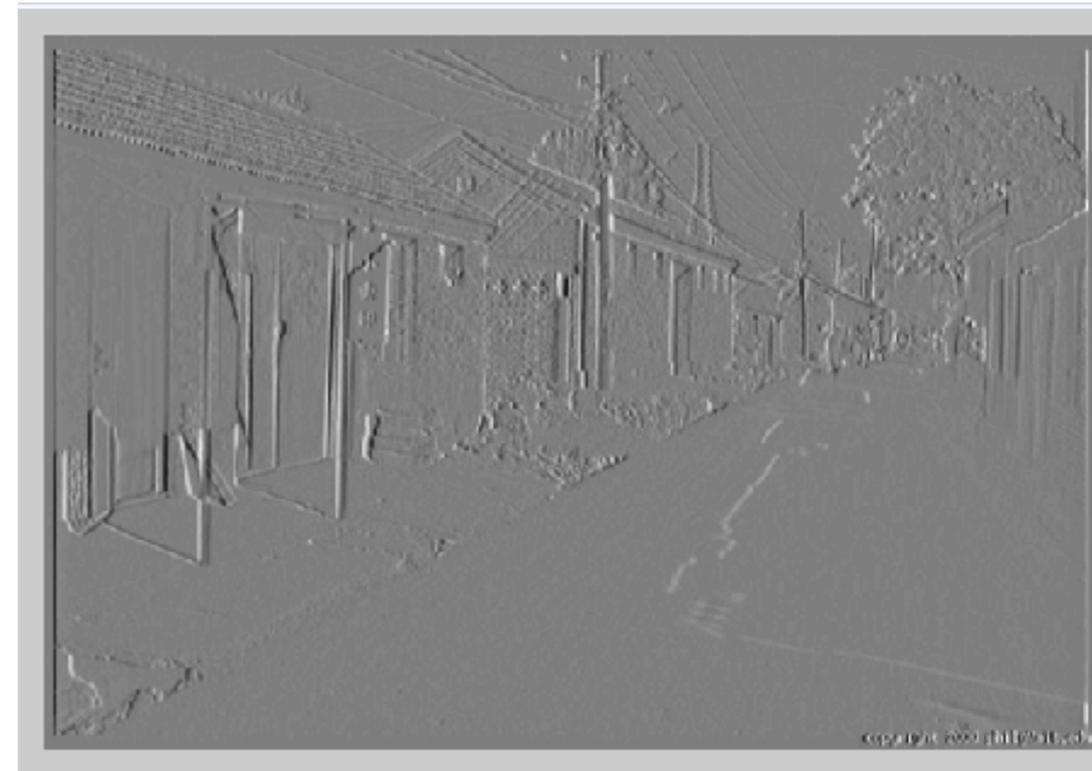
intensity image



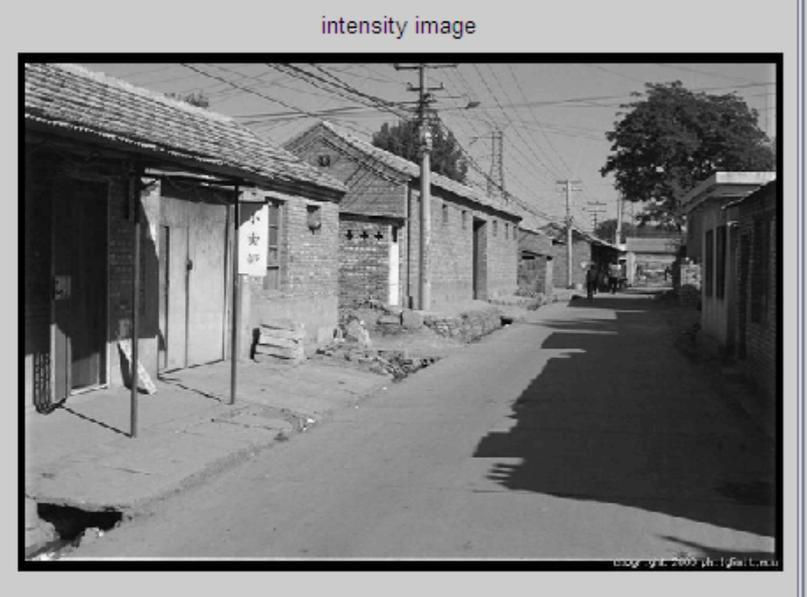
*



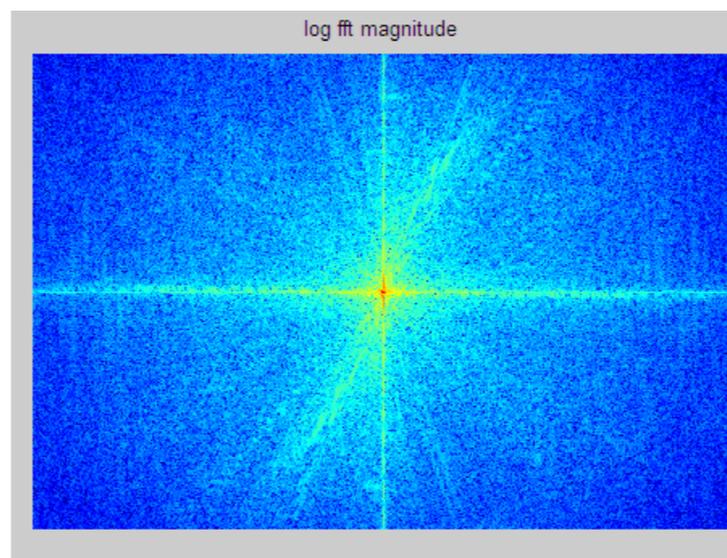
=



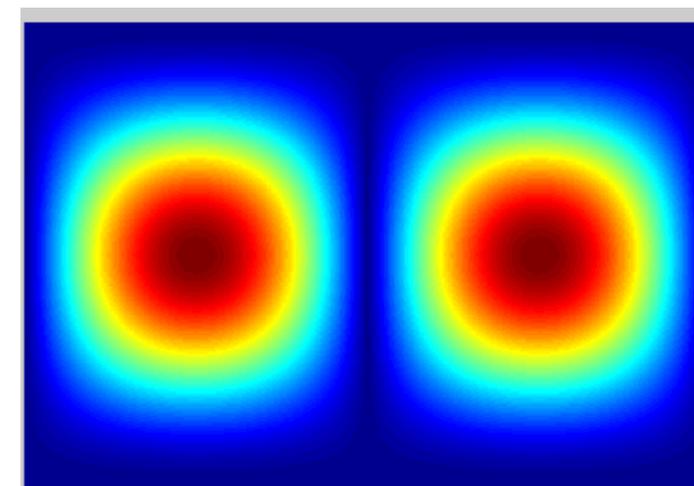
Filterage spectral



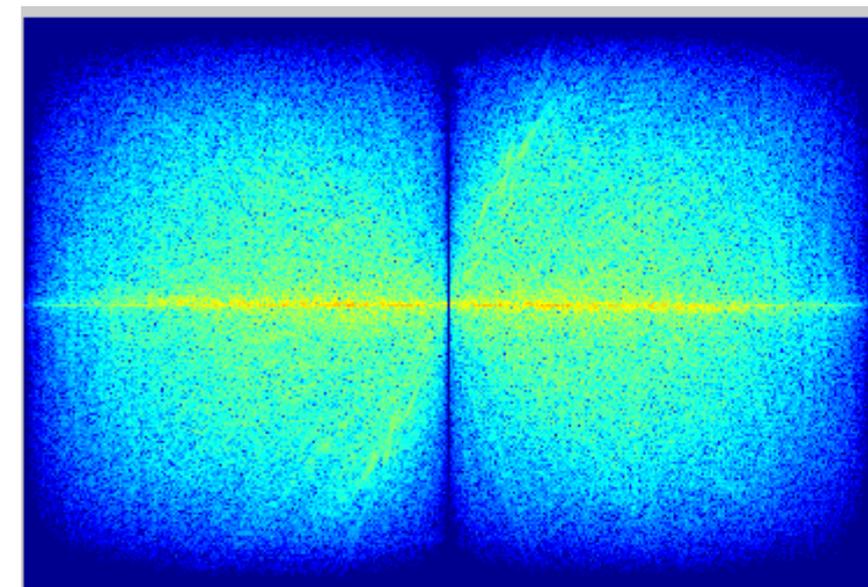
FFT



\times



\parallel



FFT inverse

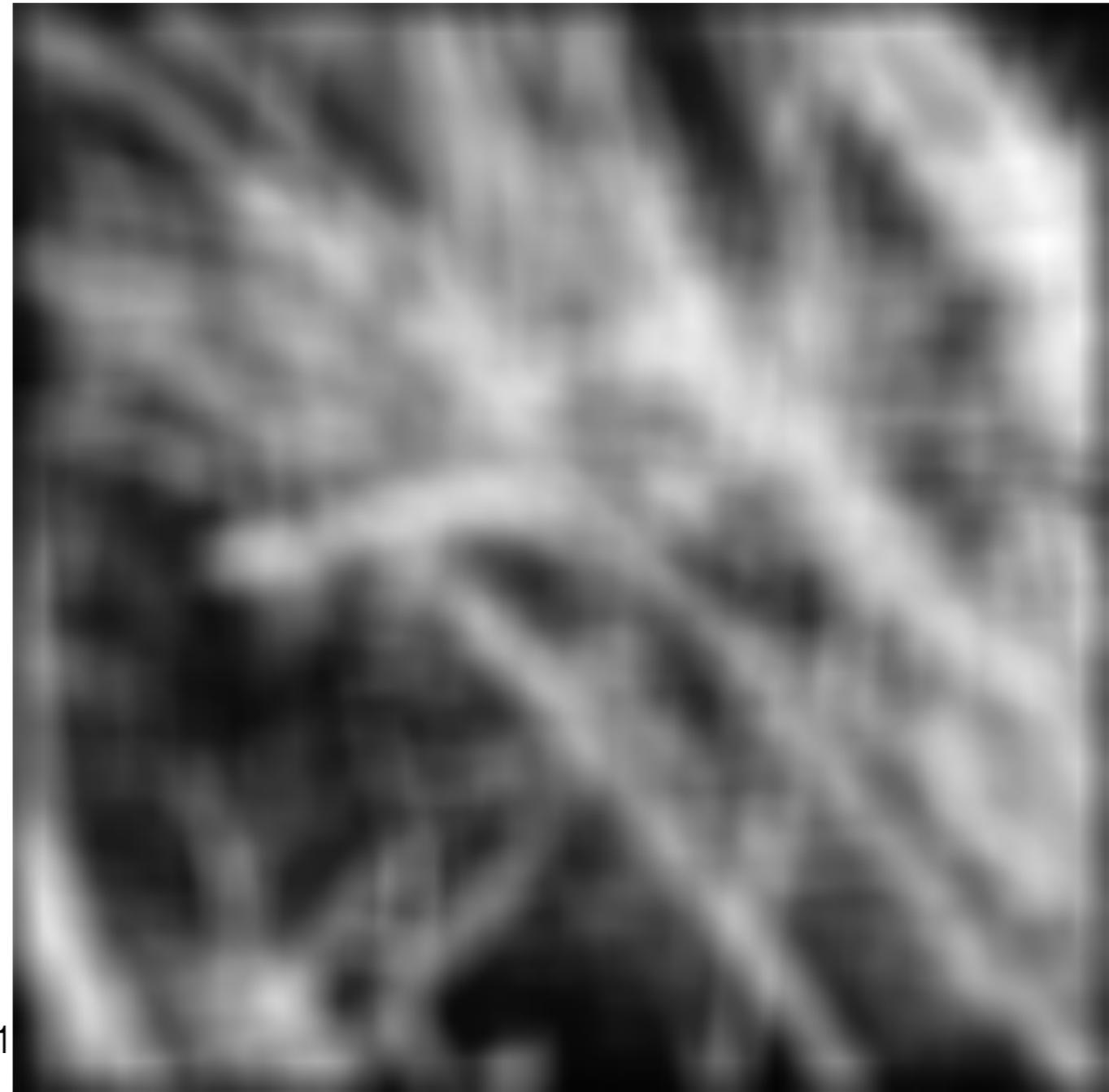
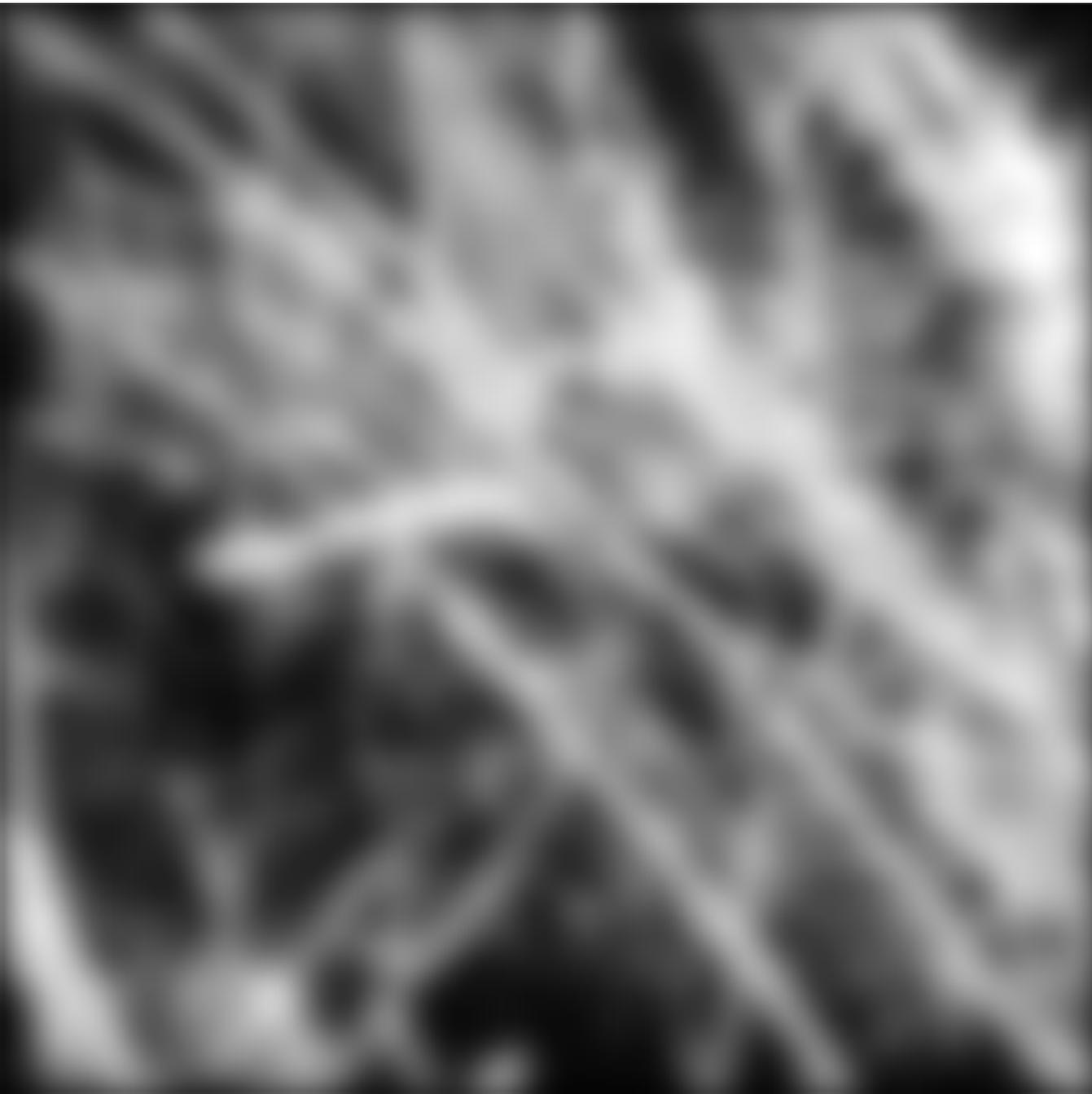
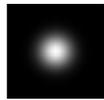


Démonstration

Filtrage spectral



Pourquoi le filtre gaussien nous donne une image lisse,
mais pas le filtre boîte?

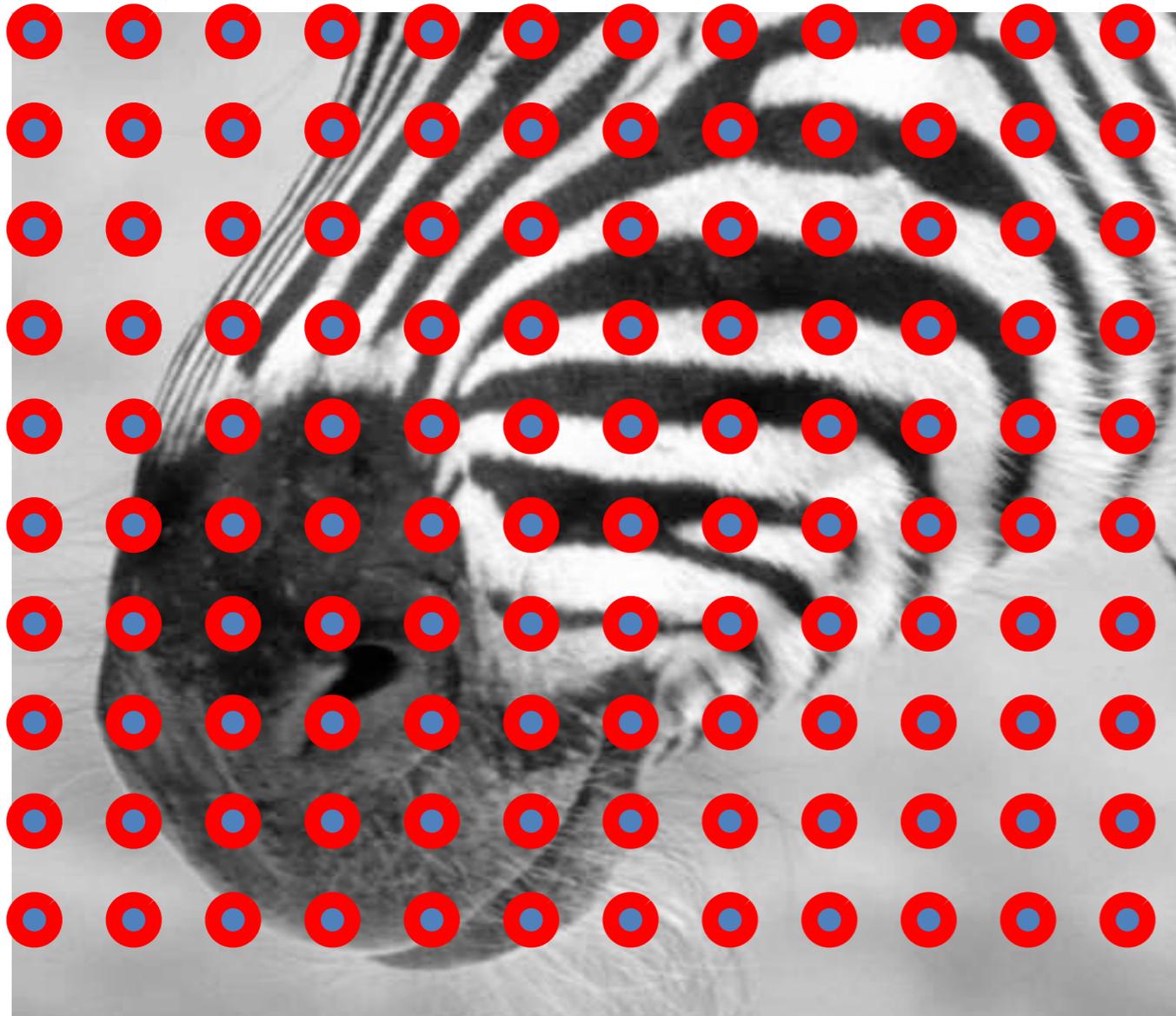


Pourquoi une image à plus faible résolution est toujours compréhensible?
Quelle est l'information perdue?



Image: <http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/>

Réduction de taille d'un facteur 2



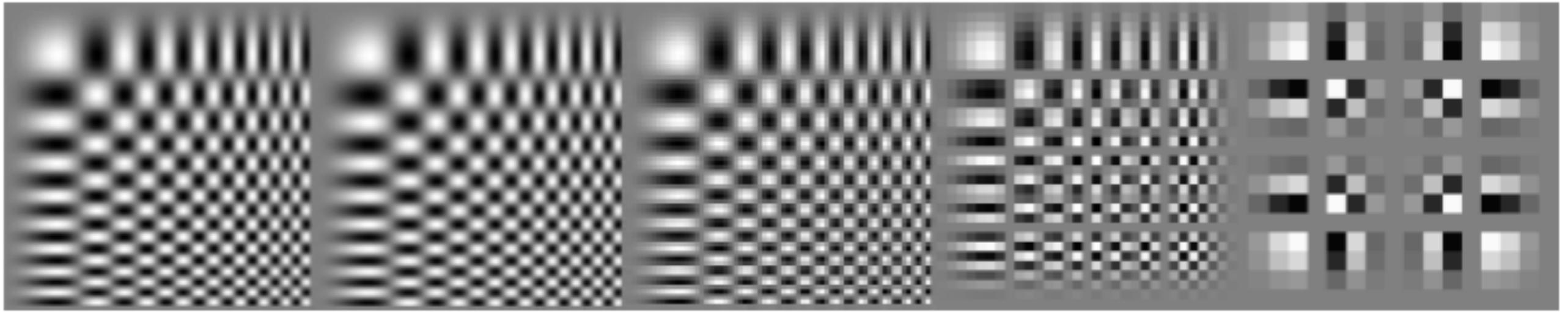
256x256

128x128

64x64

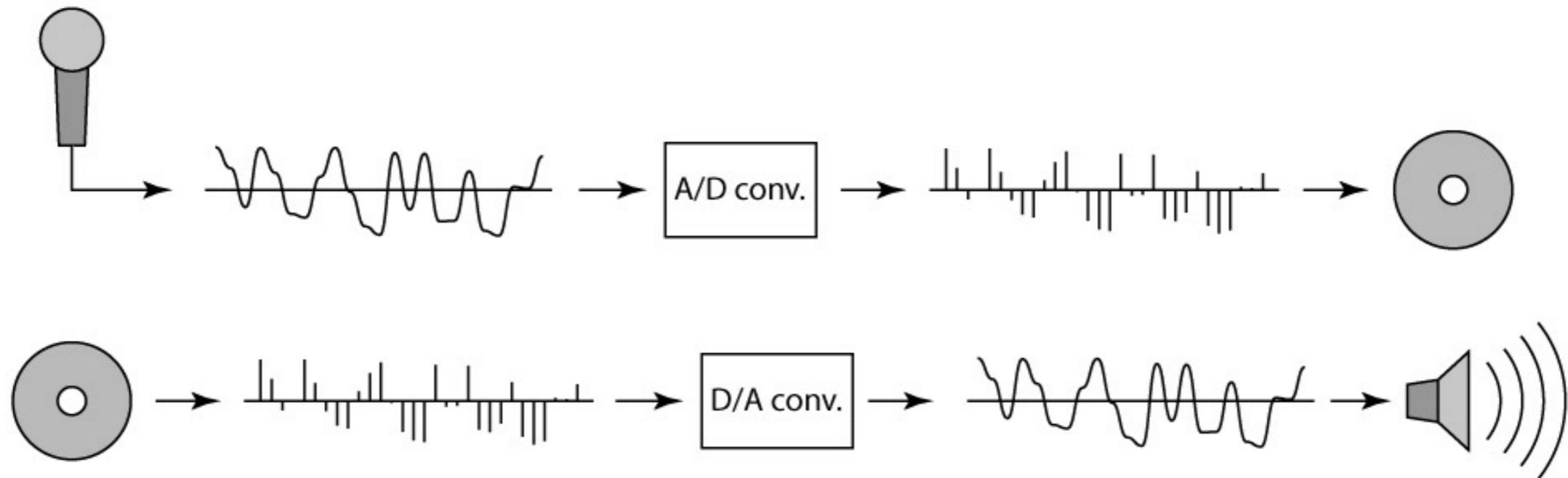
32x32

16x16



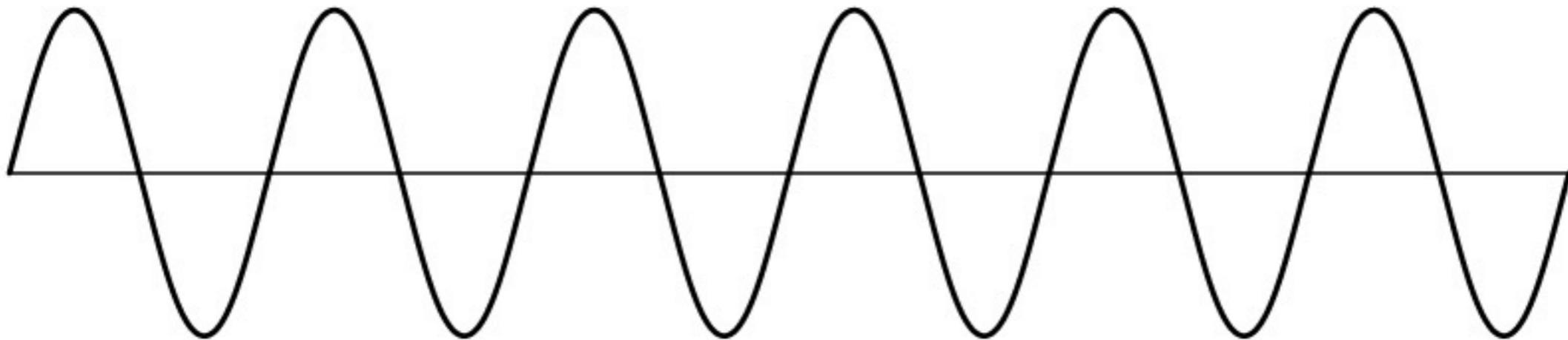
Exemple: 1D (audio)

- Enregistrement: son \rightarrow échantillons numériques
- Écoute: échantillons numériques \rightarrow son
- comment s'assurer que l'on peut «boucher les trous» correctement?



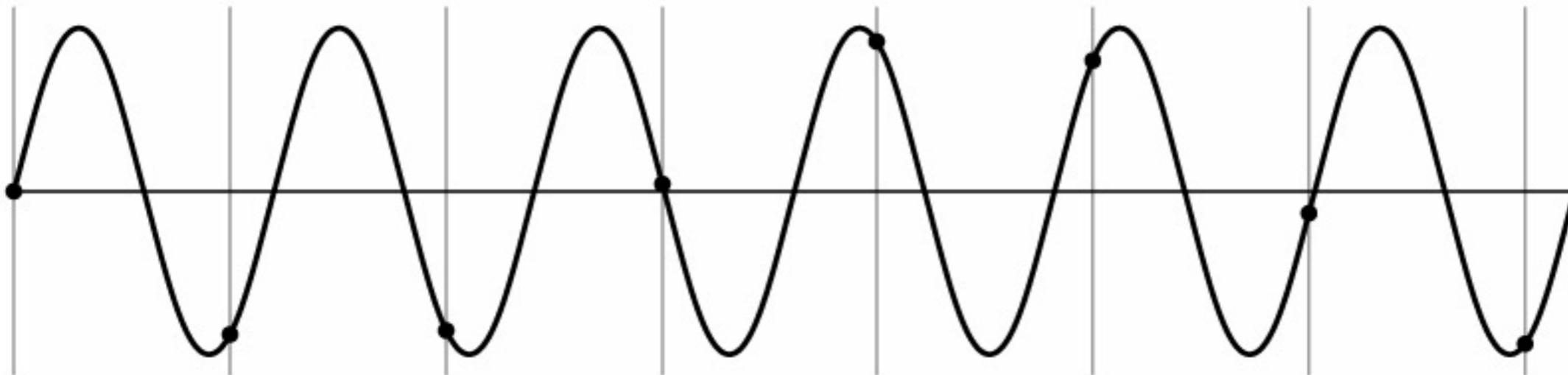
Échantillonnage et reconstruction

- Signal: sinus en 1-D



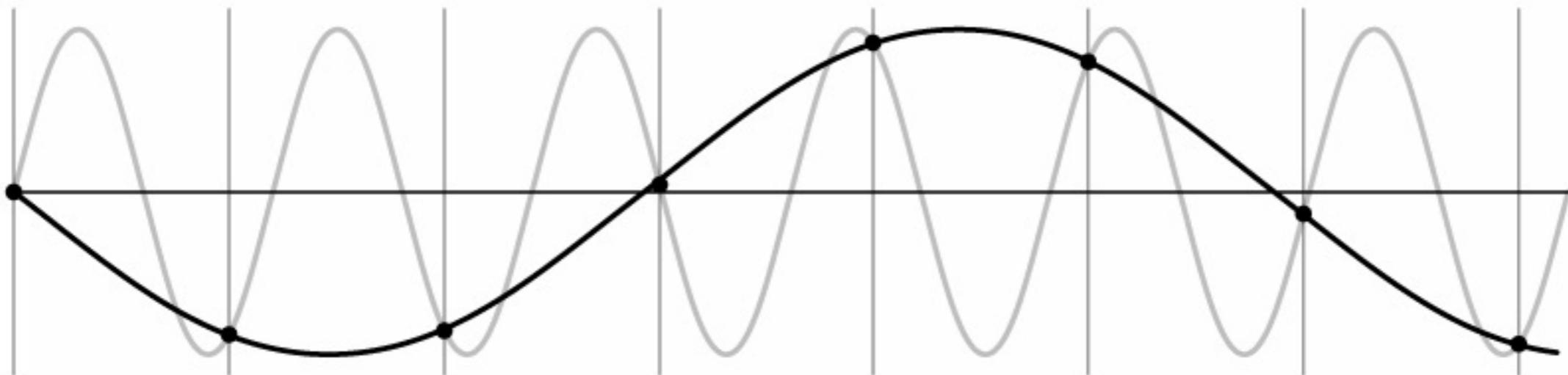
Échantillonnage et reconstruction

- On échantillonne à une certaine fréquence
- Qu'arrive-t-il si on en «manque des bouts»?
 - Pas trop de surprise: on perd de l'information



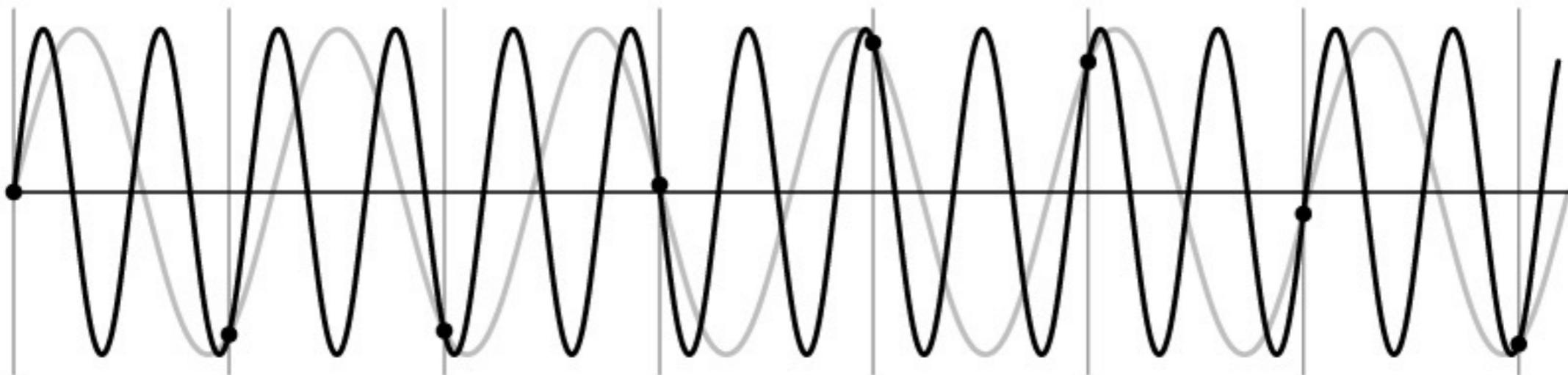
Échantillonnage et reconstruction

- Surprise: le signal reconstruit est confondu avec un *autre* signal, à fréquence plus faible



Recouvrement spectral

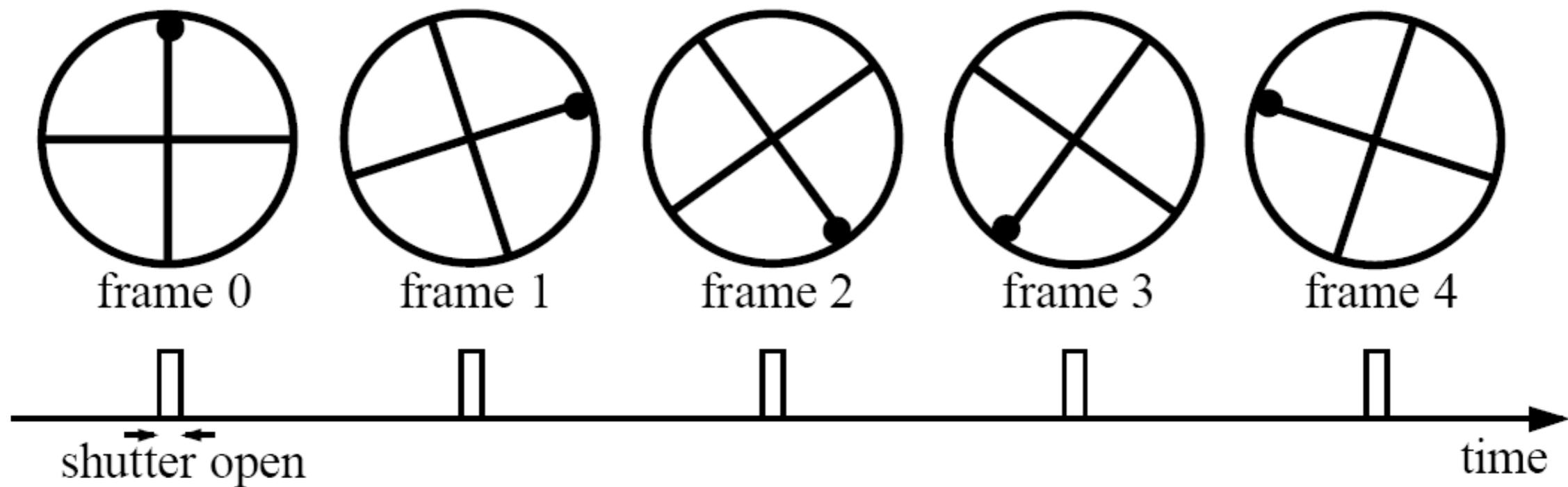
- Signaux de fréquences différentes “déguisés” dans notre signal original



Recouvrement spectral

- L'échantillonnage peut être dangereux!
- Erreurs typiques:
 - “Roues tournant à l'envers”
 - “Jeu d'échec disparaissant à distance”
 - “Texture des vêtements à la télé”

Recouvrement spectral dans les vidéos



https://www.youtube.com/watch?v=B8EMI3_0TO0

Recouvrement spectral en infographie



À la télé....

<http://www.youtube.com/watch?v=jXEgnRWRJfg>

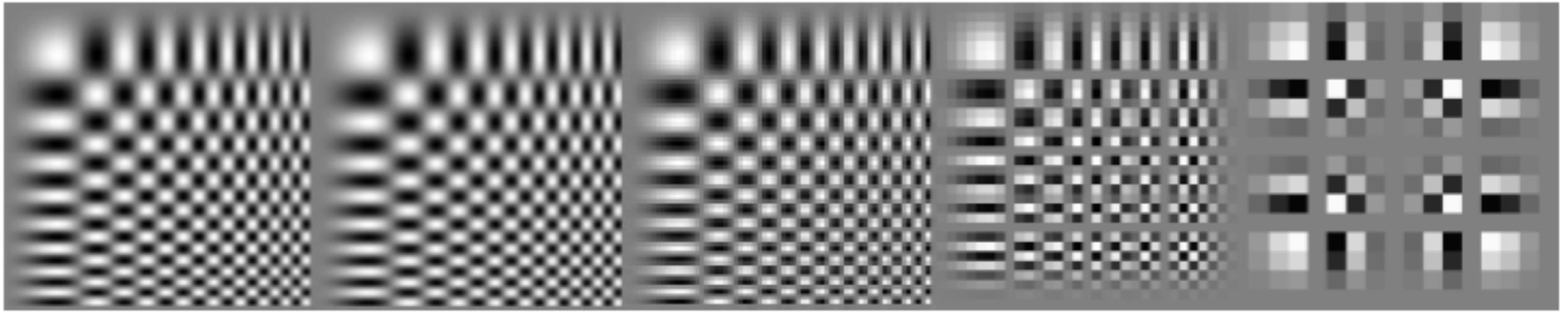
256x256

128x128

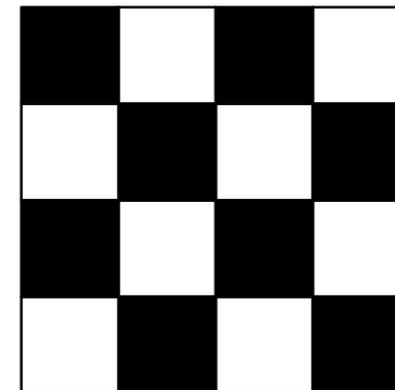
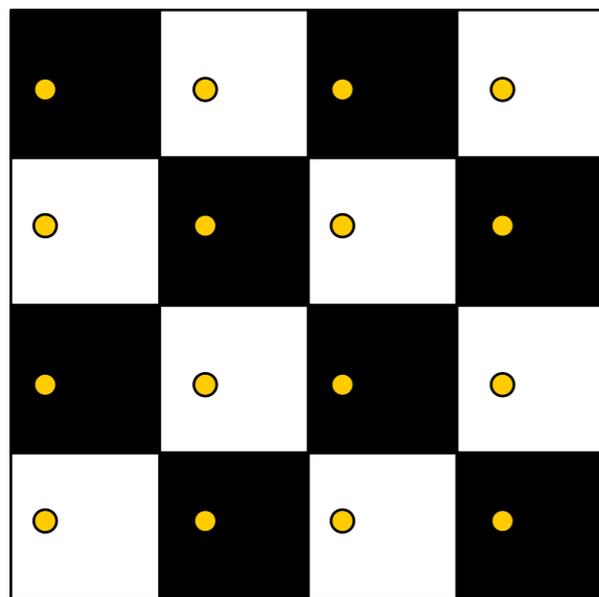
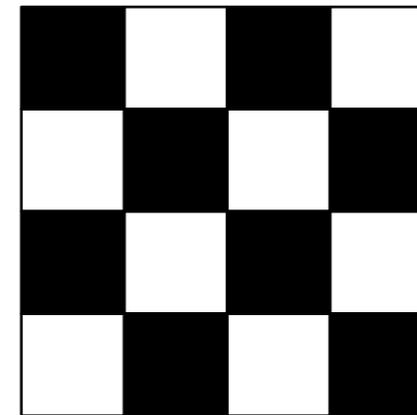
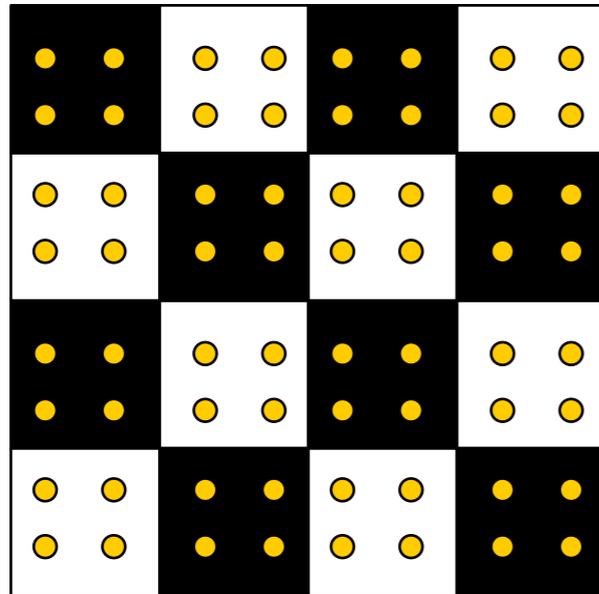
64x64

32x32

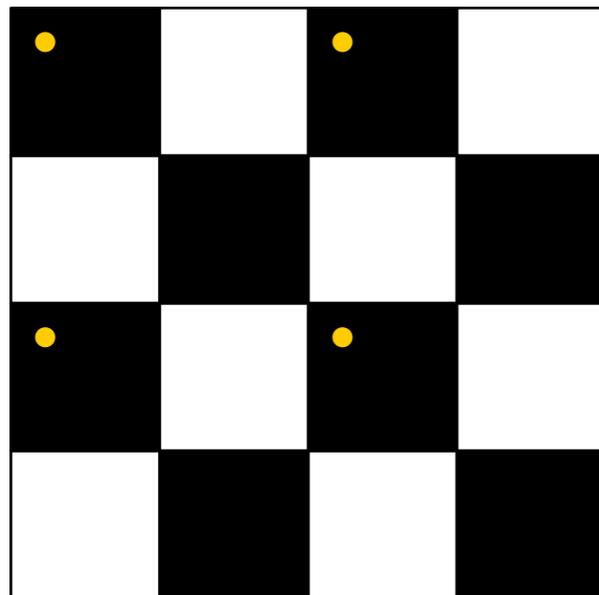
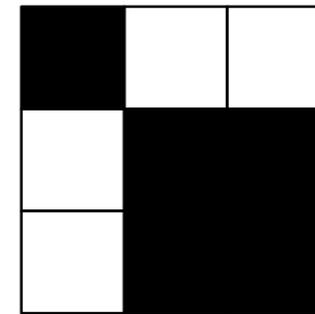
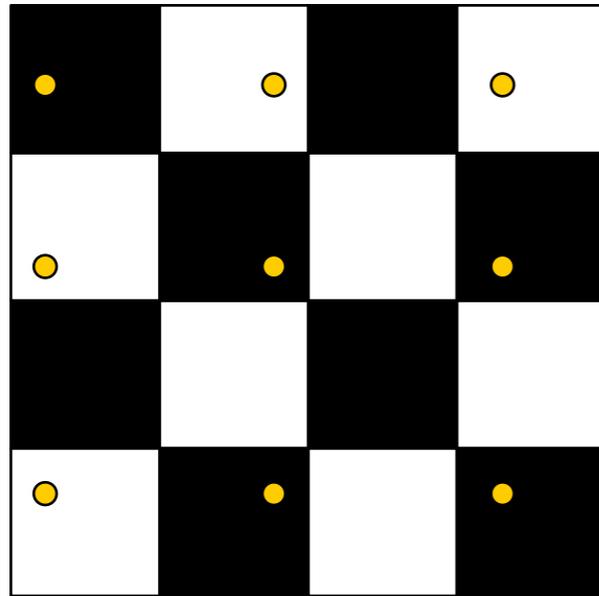
16x16



Bon échantillonnage

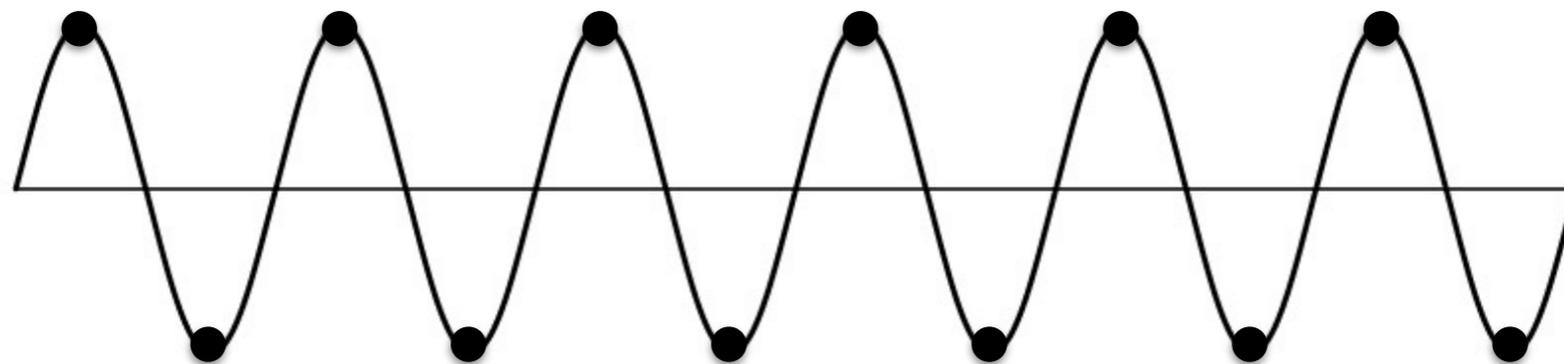


Mauvais échantillonnage = recouvrement!

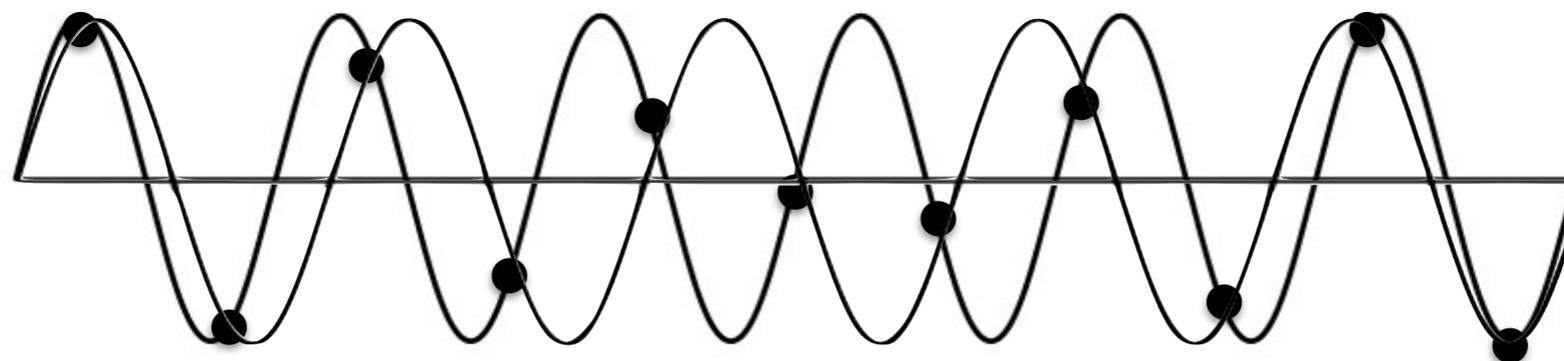


Théorème d'échantillonnage Nyquist-Shannon

- La fréquence d'échantillonnage d'un signal devrait être $\geq 2 \times f_{\max}$
 - f_{\max} = fréquence maximale du signal
- Cette condition respectée garantit la reconstruction du signal original



bon!



mauvais

Anti-recouvrement (anti-aliasing)

- Solutions:
 - Augmenter la fréquence d'échantillonnage!
 - Réduire les fréquences qui sont plus grandes que la moitié de la fréquence d'échantillonnage
 - Perte d'information
 - Mieux que le recouvrement spectral!

Démonstration

Recouvrement spectral

Recouvrement spectral

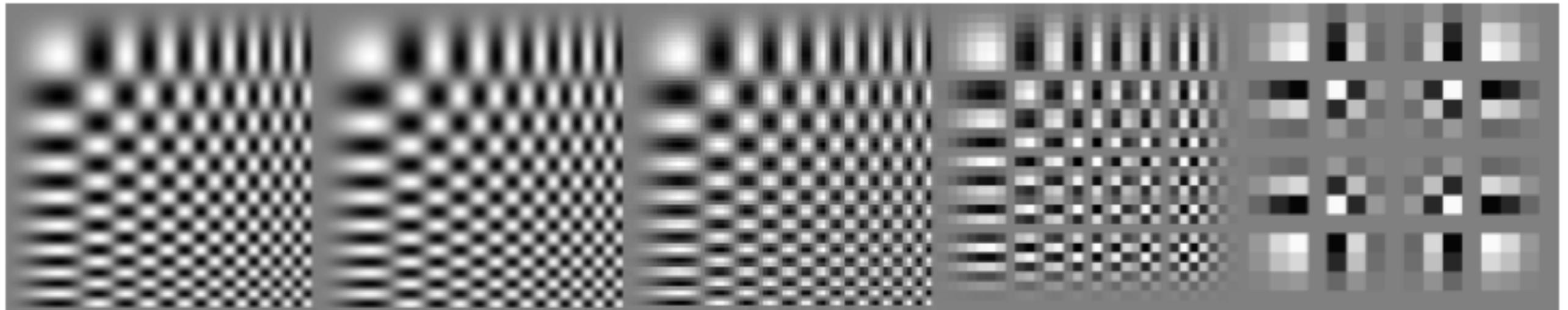
256x256

128x128

64x64

32x32

16x16



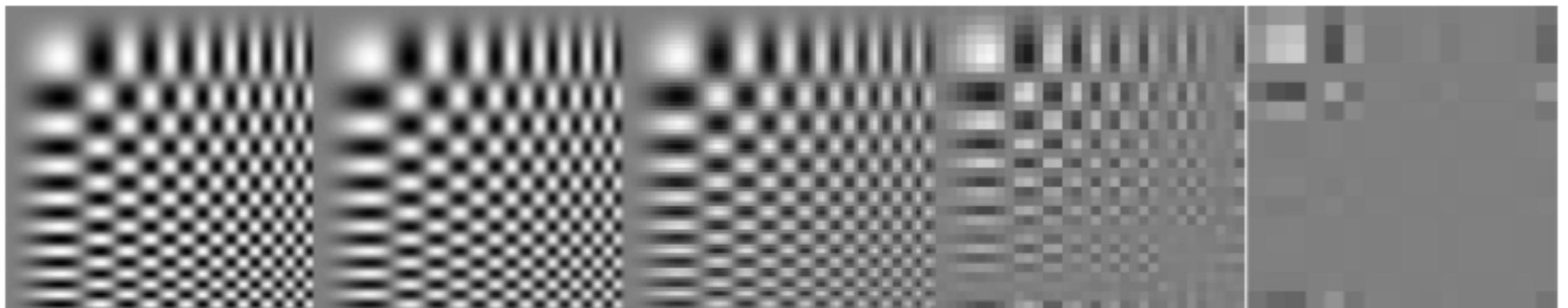
256x256

128x128

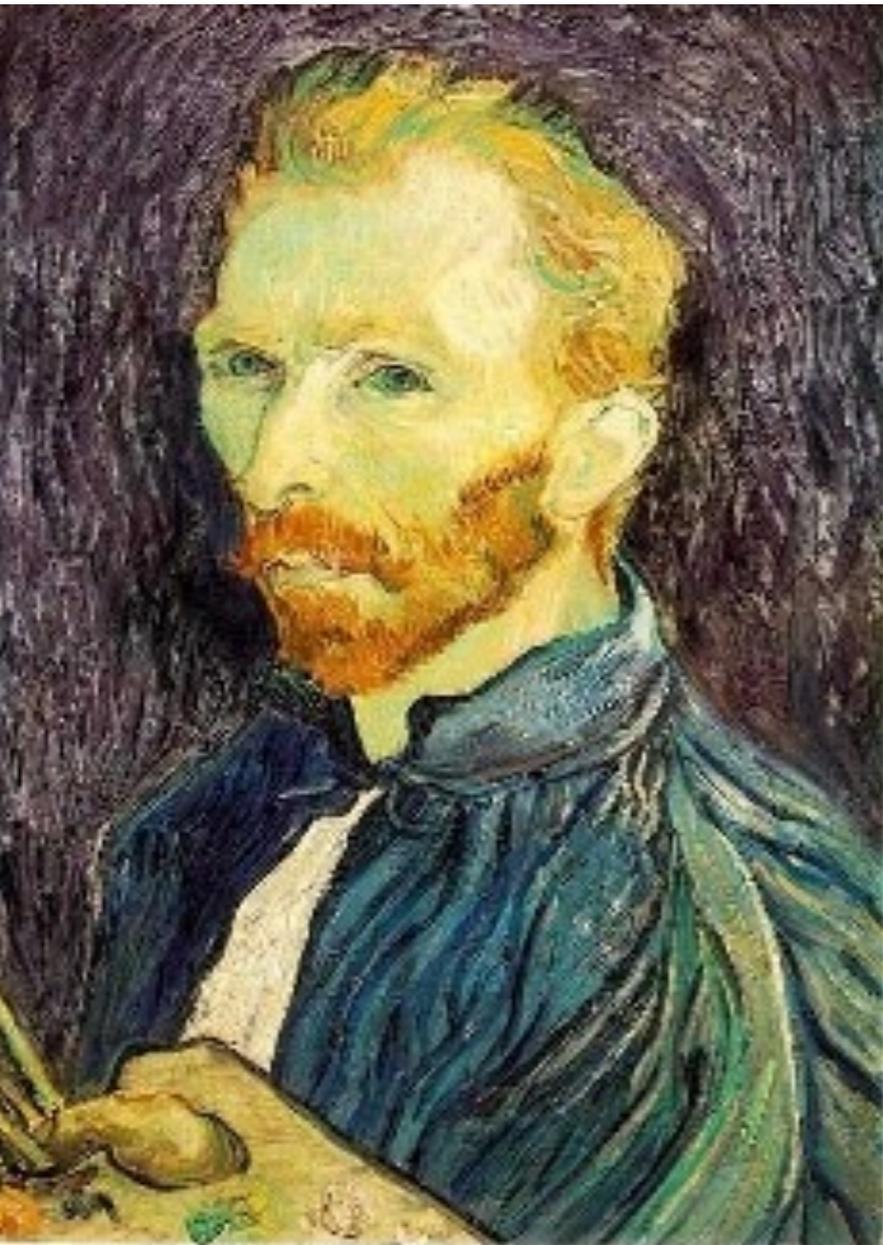
64x64

32x32

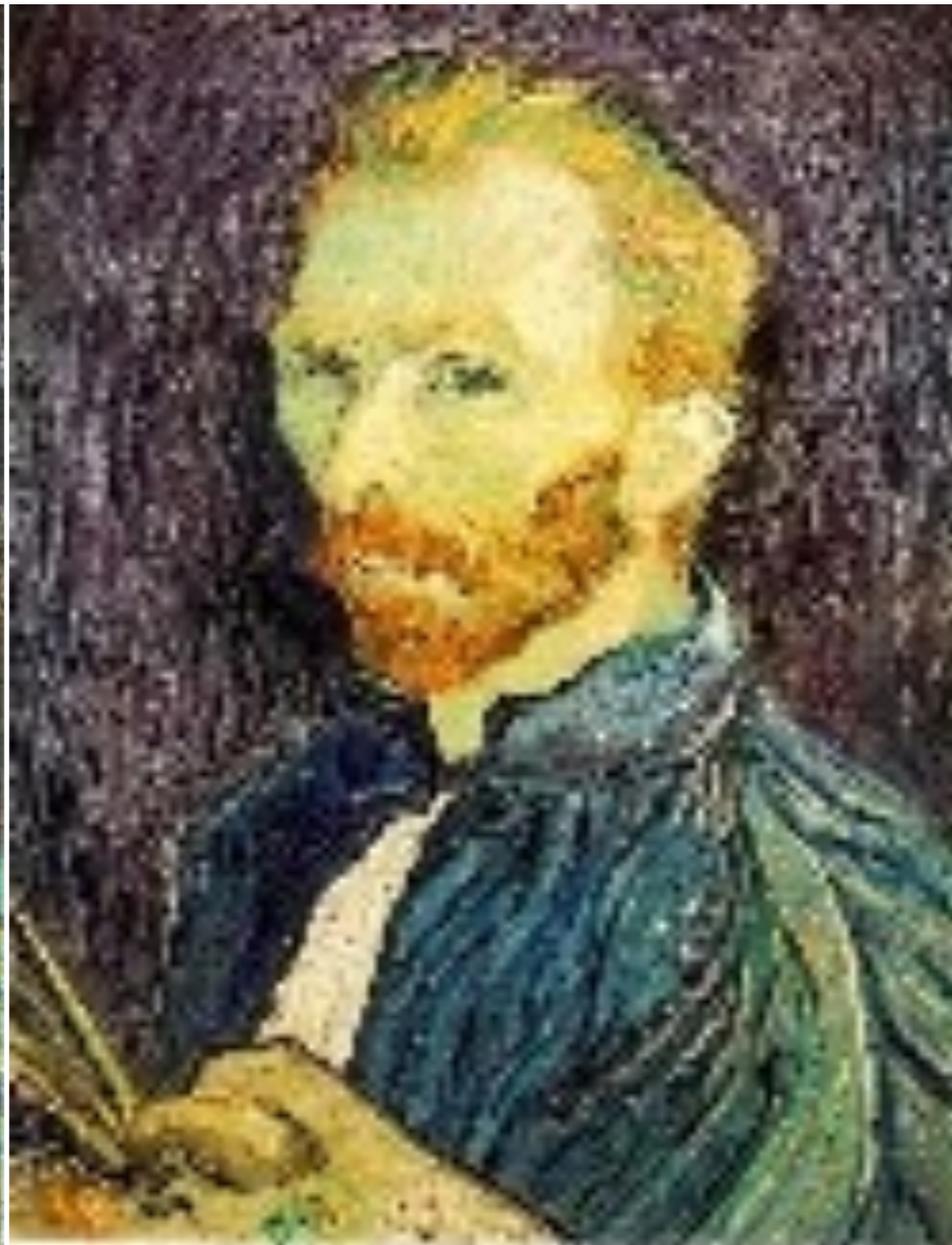
16x16



Échantillonner sans filtrage



1/2



1/4 (2x zoom)



1/8 (4x zoom)

Échantillonner avec filtrage



Gaussian $1/2$



G $1/4$



G $1/8$