

# Filtrage spectral



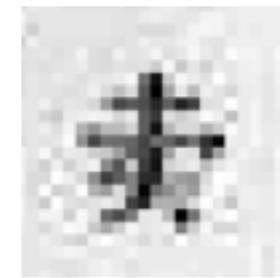
GIF-4105/7105 Photographie Algorithmique, Hiver 2017  
Jean-François Lalonde

# Administration

- TP1: comment ça été?
- TP2: disponible aujourd'hui!
  - À remettre le 9 février (dans 2 semaines) @ 23h59
  - On s'en reparle à la fin du cours

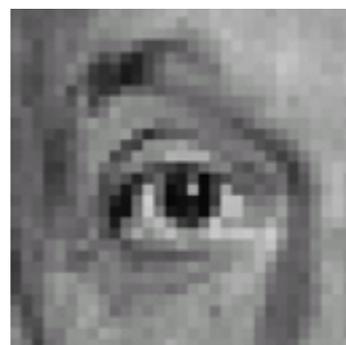
# La semaine dernière...

- Une image est une matrice de nombres
  - Souvent mieux de travailler sur la luminance
- Opérations sur les pixels
  - Égalisation d'histogramme
- Filtrage linéaire
  - Peut adoucir, accentuer, identifier les arrêtes horizontales/verticales



=

0.9	0.93	0.94	0.97	0.62	0.37	0.85	0.97	0.93	0.92	0.9
0.9	0.89	0.82	0.89	0.56	0.31	0.75	0.92	0.81	0.95	0.9
0.8	0.72	0.51	0.55	0.51	0.42	0.57	0.41	0.49	0.91	0.9
0.9	0.95	0.88	0.94	0.56	0.46	0.91	0.87	0.90	0.97	0.9
0.7	0.81	0.81	0.87	0.57	0.37	0.80	0.88	0.89	0.79	0.8
0.4	0.62	0.60	0.58	0.50	0.60	0.58	0.50	0.61	0.45	0.3
0.8	0.84	0.74	0.58	0.51	0.39	0.73	0.92	0.91	0.49	0.7
0.9	0.67	0.54	0.85	0.48	0.37	0.88	0.90	0.94	0.82	0.9
0.6	0.49	0.56	0.66	0.43	0.42	0.77	0.73	0.71	0.90	0.9
0.7	0.73	0.90	0.67	0.33	0.61	0.69	0.79	0.73	0.93	0.9
0.9	0.94	0.89	0.49	0.41	0.78	0.78	0.77	0.89	0.99	0.9


$$\frac{1}{9}$$

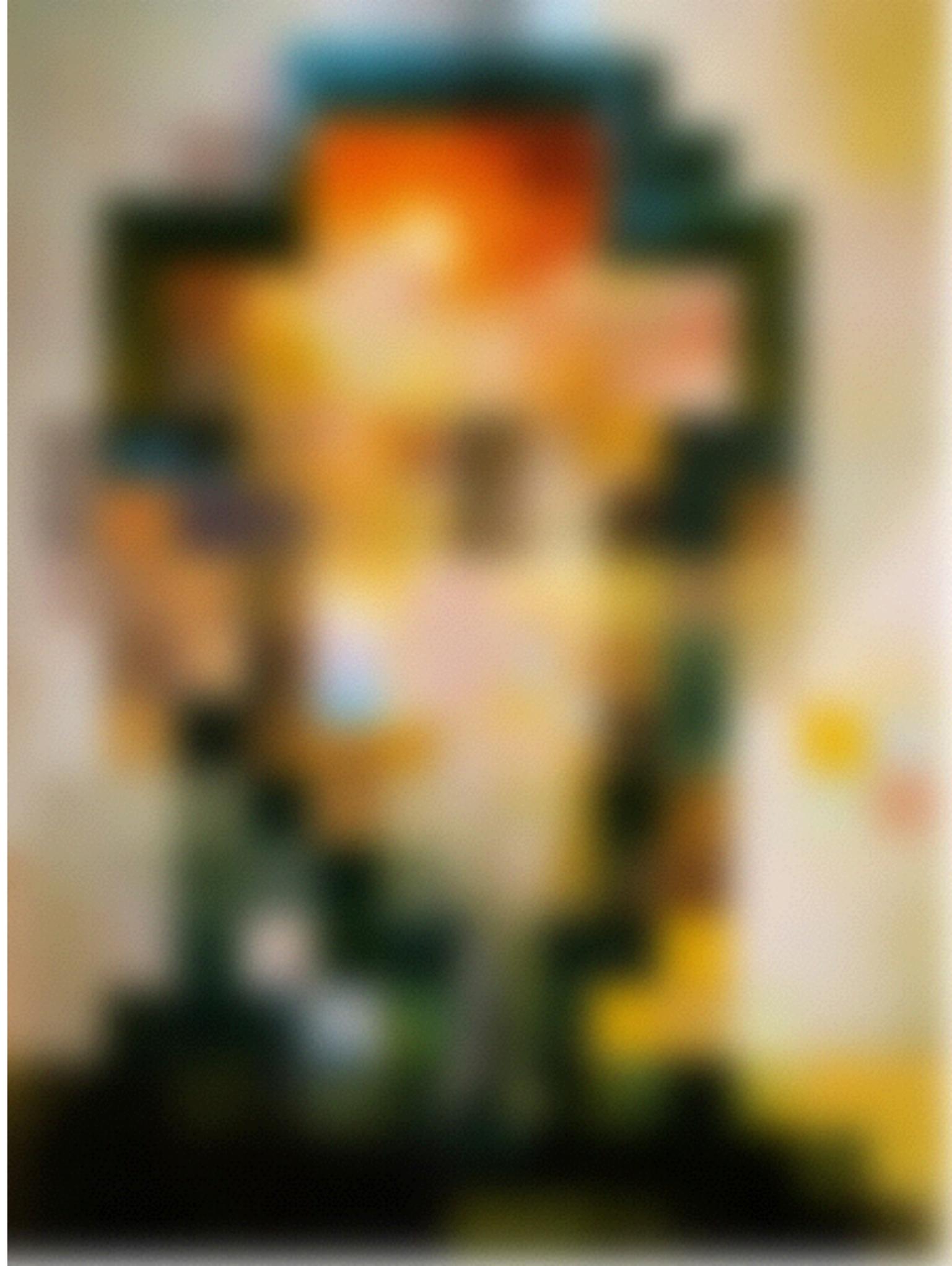
1	1	1
1	1	1
1	1	1

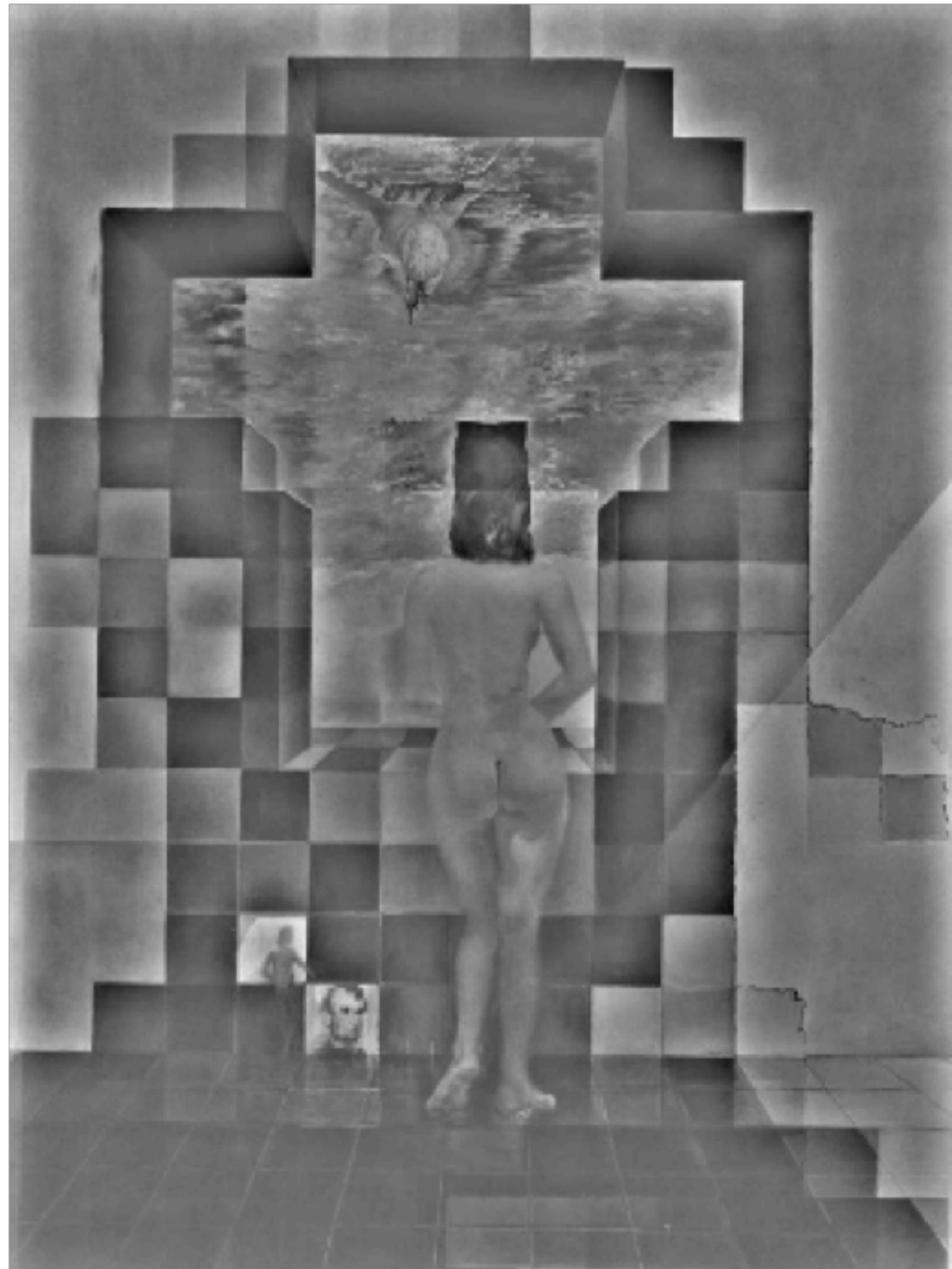
# Aujourd'hui

- Retour sur le filtre gaussien
- La transformée de Fourier et le domaine spectral
  - Autre dimension du filtrage: domaine spectral
  - Échantillonnage
  - Applications du filtrage

Salvador Dali  
"Gala contemplant la mer Méditerranée qui à  
vingt mètres devient le portrait d'Abraham  
Lincoln ", 1976

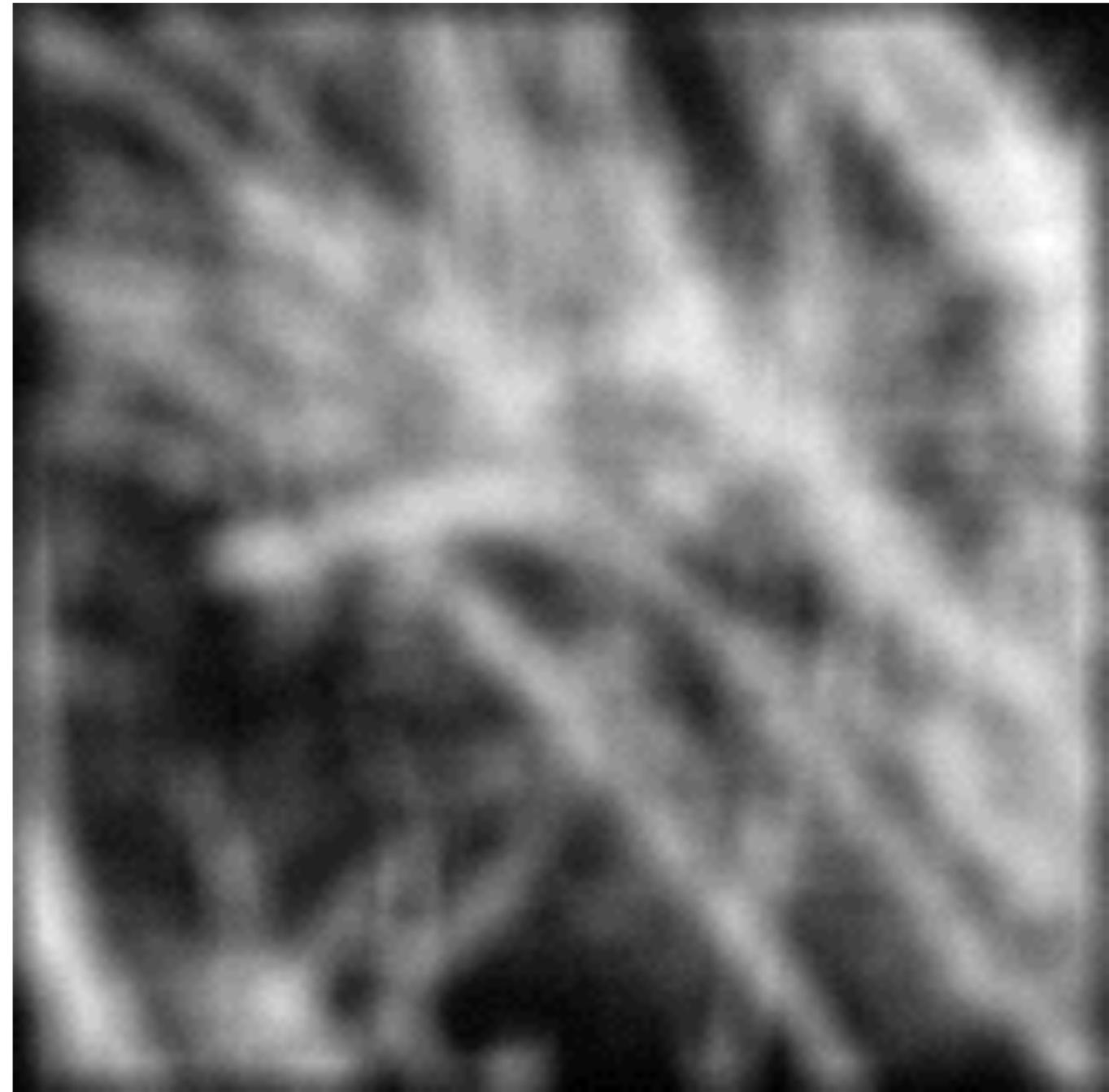
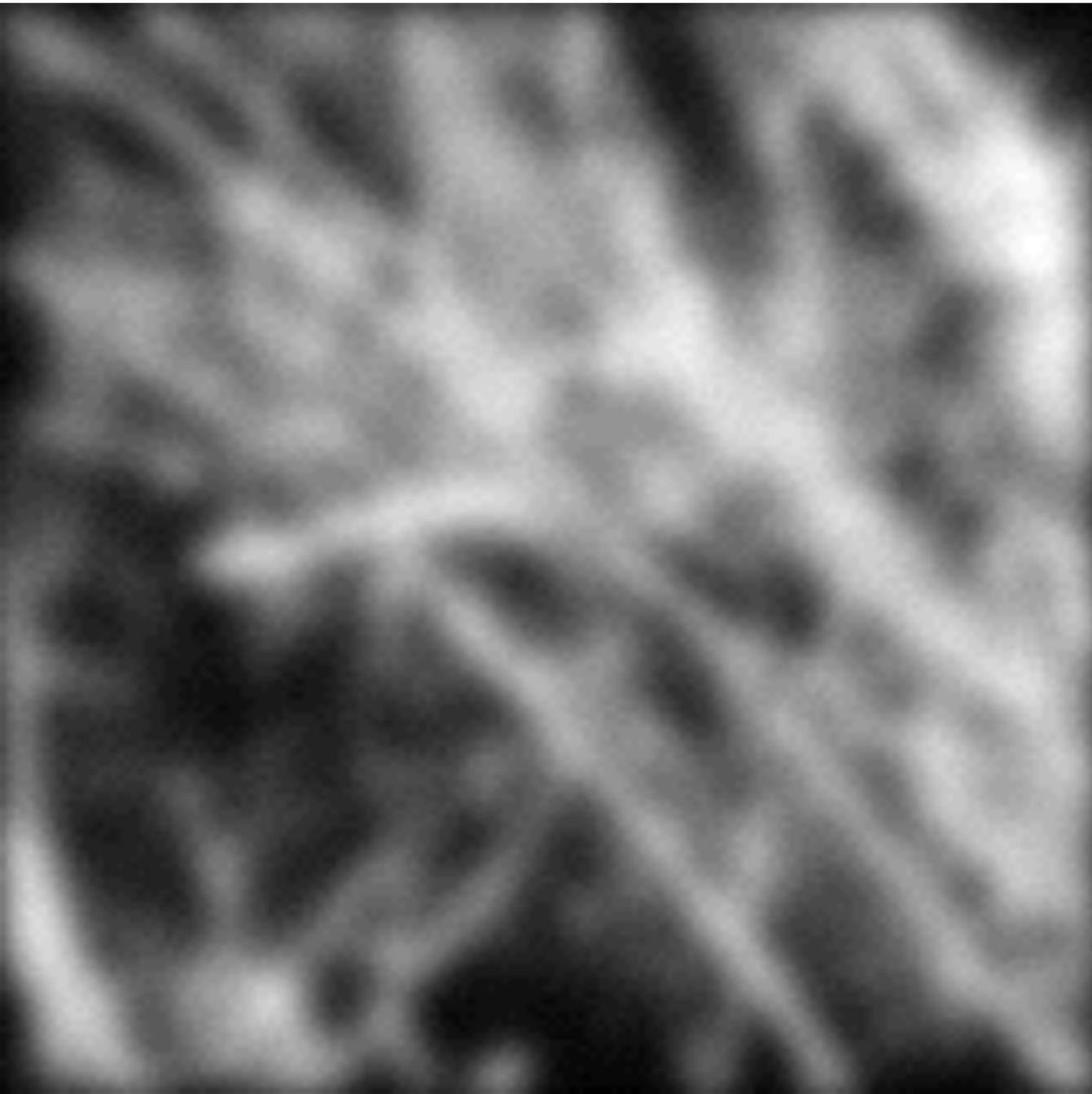








Pourquoi le filtre gaussien nous donne une image lisse,  
mais pas le filtre boîte?



Pourquoi une image à plus faible résolution est toujours compréhensible?  
Quelle est l'information perdue?



Image: <http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/>

# La transformée de Fourier

(sans se faire mal)

# Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

- a eu une idée révolutionnaire (1807):
  - Toute fonction peut être écrite comme une somme pondérée de sinus et cosinus de différentes fréquences
- Vous n'y croyez pas?
  - Lagrange, Laplace, Legendre et autres non plus!
  - Pas traduit en anglais jusqu'à 1878!



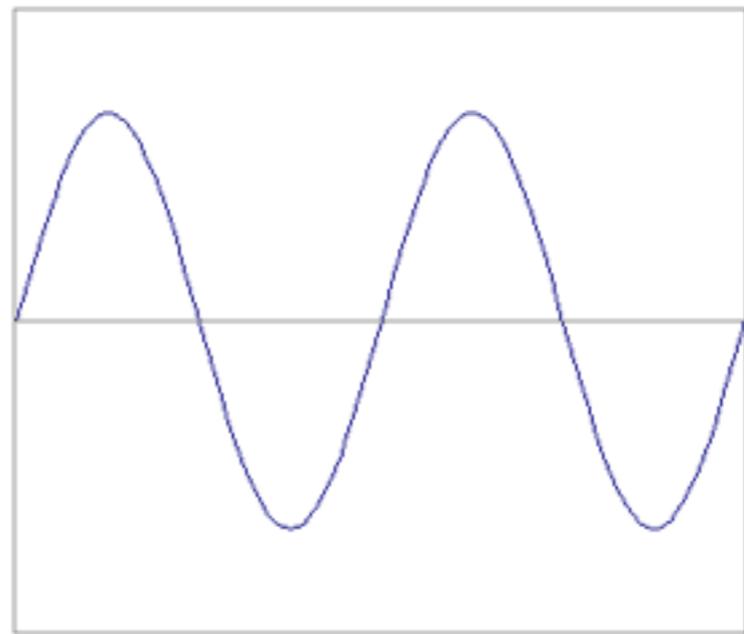
# La transformée de Fourier

- Toute fonction peut être écrite comme une somme pondérée de sinus de différentes fréquences

Notre “unité” de base:

$$A \sin(\omega x + \Phi)$$

↑                    ↑                    ↑  
amplitude      fréquence      phase



Qu'est-ce qui contrôle  
- la structure générale?  
- les détails?

# La transformée de Fourier

- Nous voulons comprendre la fréquence  $\omega$  de notre signal.
- Exprimons alors le signal avec  $\omega$  au lieu de  $x$ :



- représente la magnitude et la phase à chaque fréquence
  - Magnitude: “quantité” de signal à chaque fréquence
  - Phase: translation horizontale

# La transformée de Fourier

- $F(\omega)$  représente l'amplitude *et* la phase du signal
  - Comment faire pour représenter ces deux informations?
  - On utilise les nombres complexes

$$F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega)$$

- Où l'amplitude est:  $A = \pm \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}$
- Et la phase:  $\Phi = \tan^{-1} \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$

# Transformée de Fourier

- Directe



- Inverse



# Calculer la transformée de Fourier

Continue

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-j\omega x} dx$$

Discrète

$$H(k) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} h(x)e^{-j\frac{2\pi kx}{N}}$$

$k=-N/2..N/2$

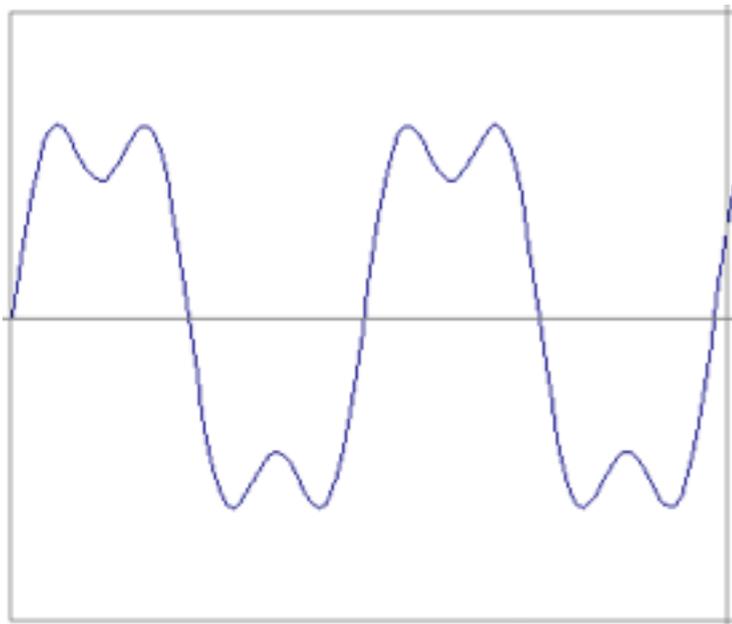


(pour s'en souvenir)

Pour la calculer, on utilise l'algorithme « Fast Fourier Transform (FFT) »,  $O(N \log N)$

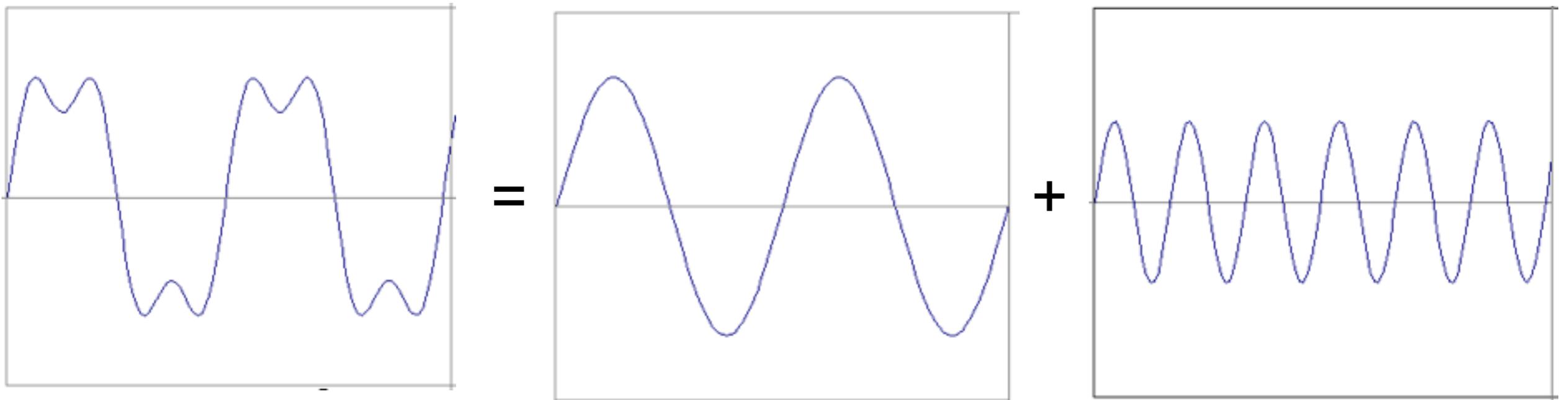
# Spectre en fréquences

exemple :  $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$



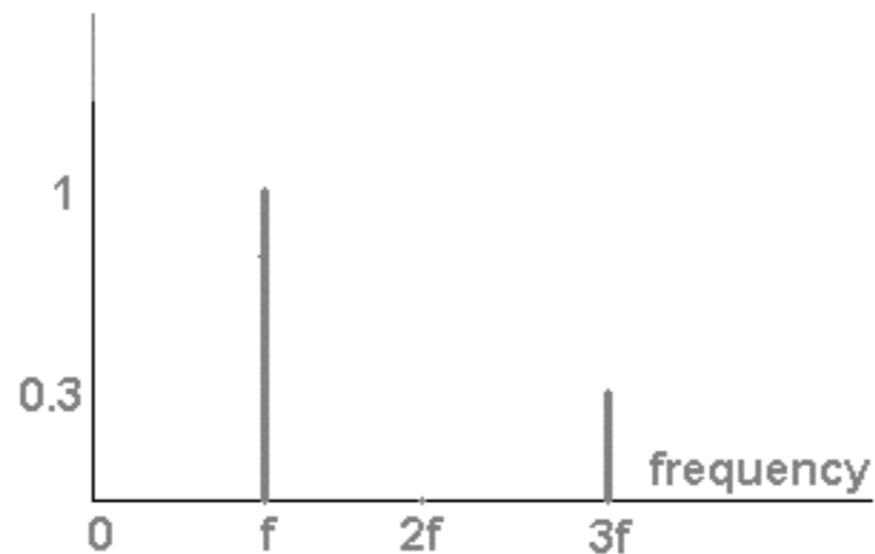
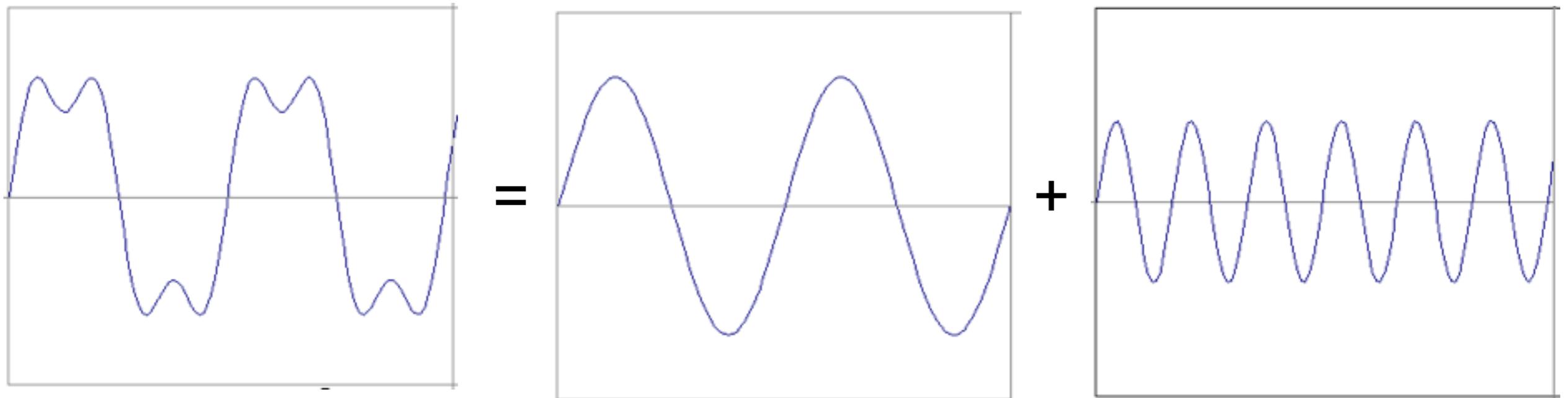
# Spectre en fréquences

exemple :  $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$

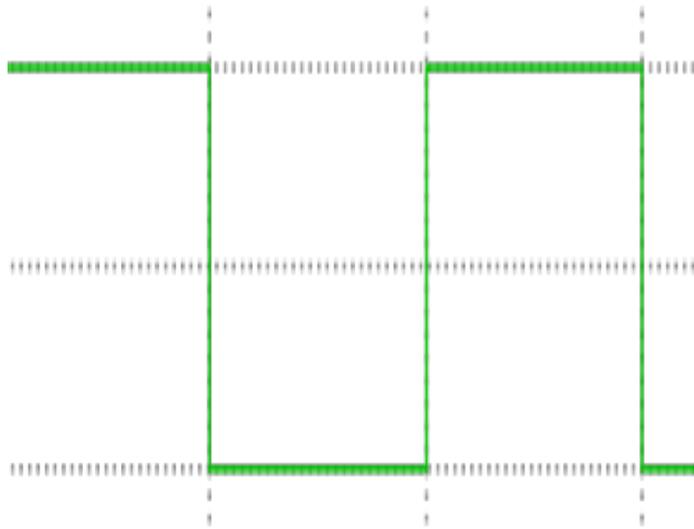


# Spectre en fréquences

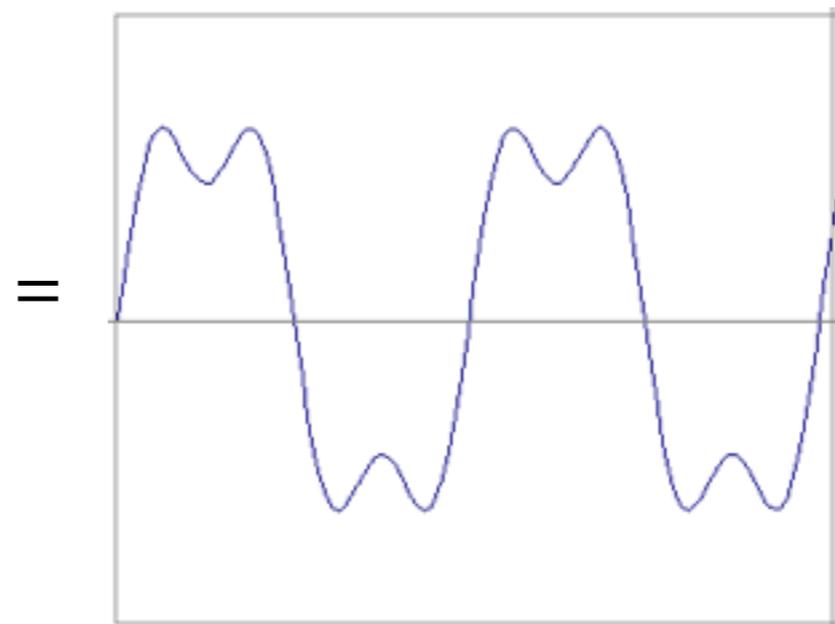
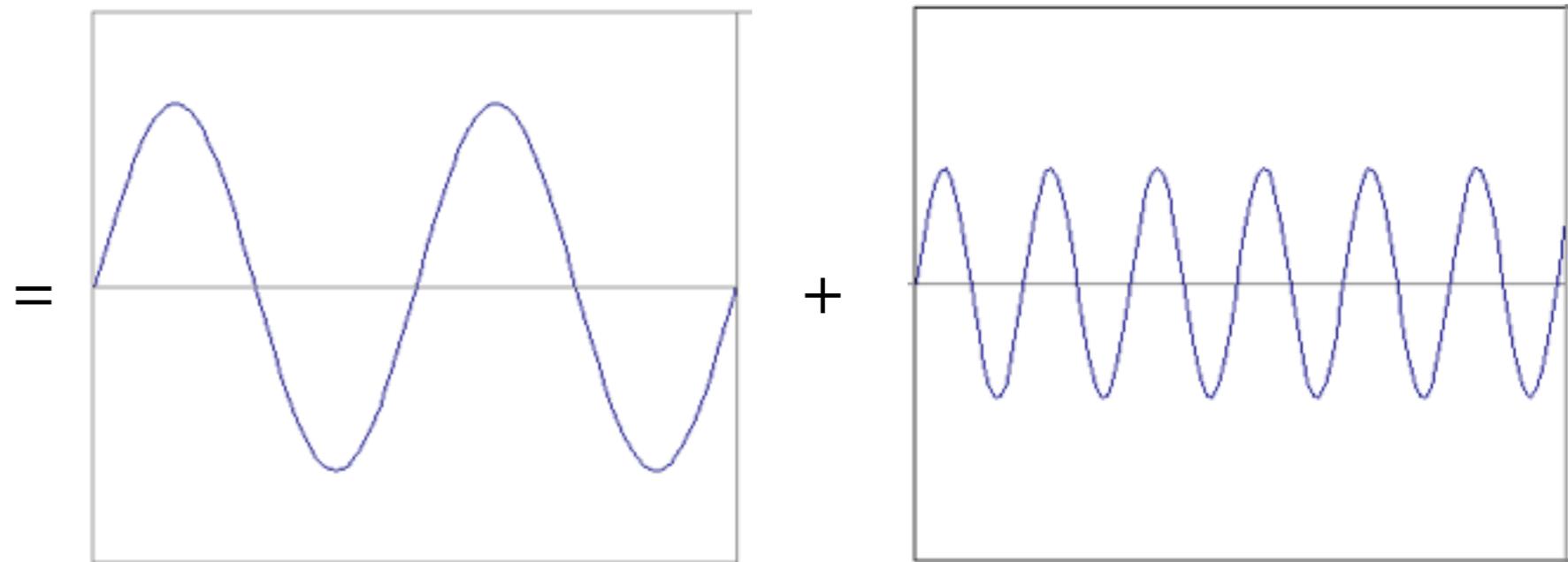
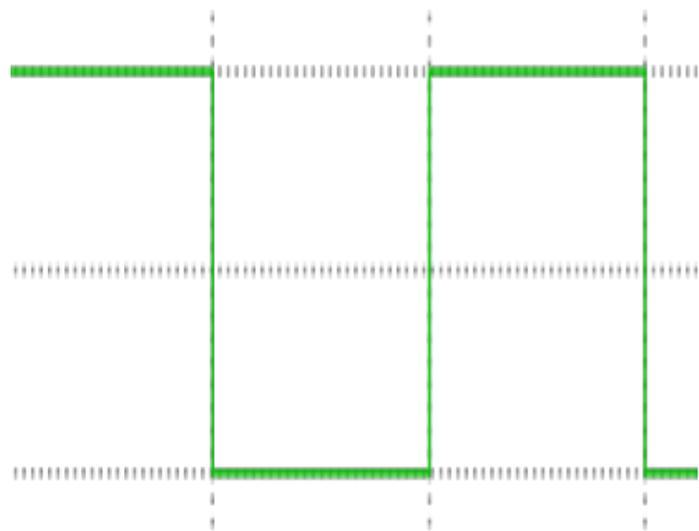
exemple :  $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$



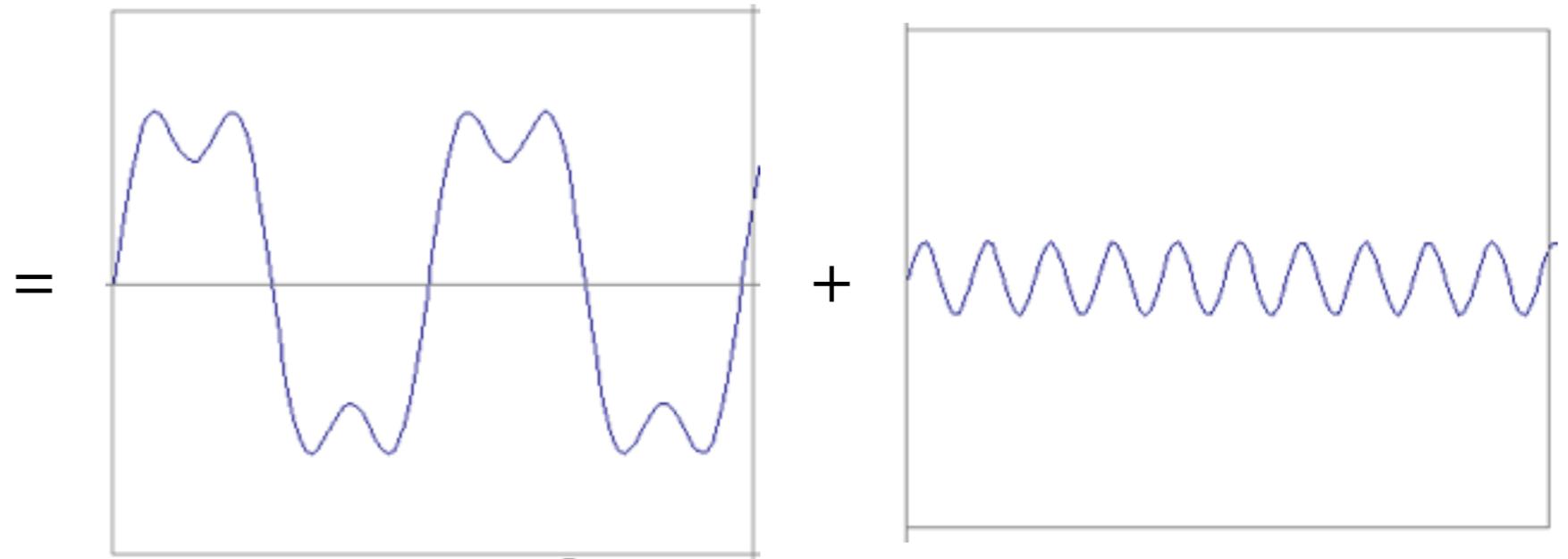
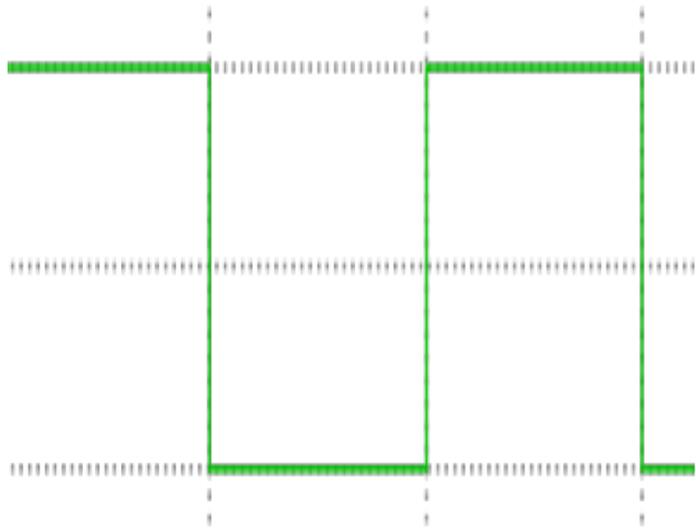
# Spectre en fréquences



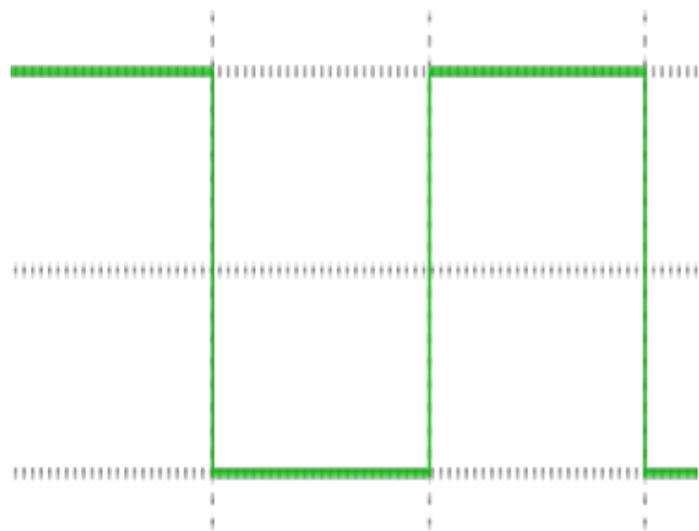
# Spectre en fréquences



# Spectre en fréquences



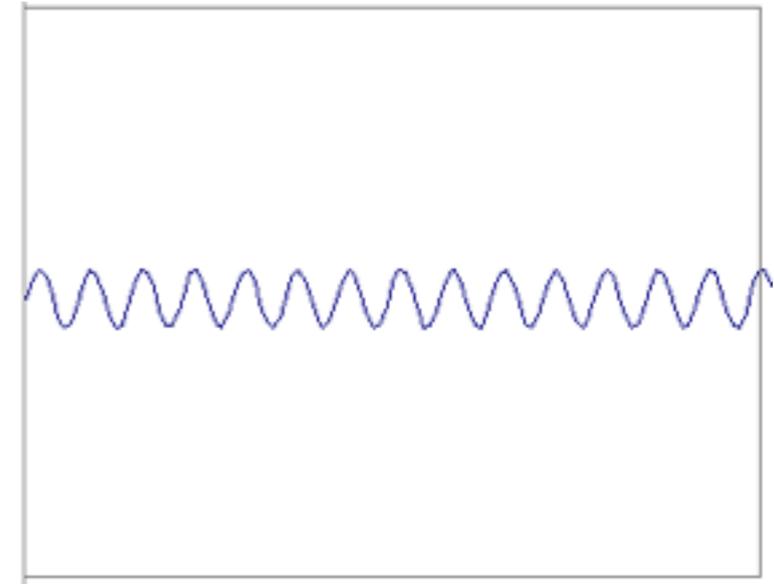
# Spectre en fréquences



=



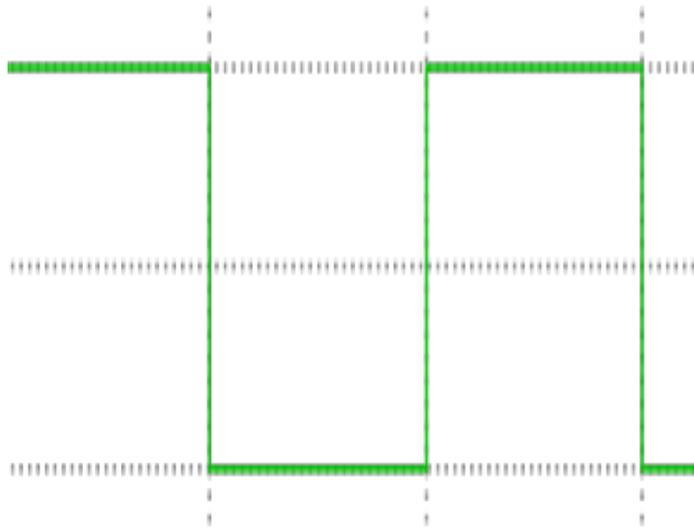
+



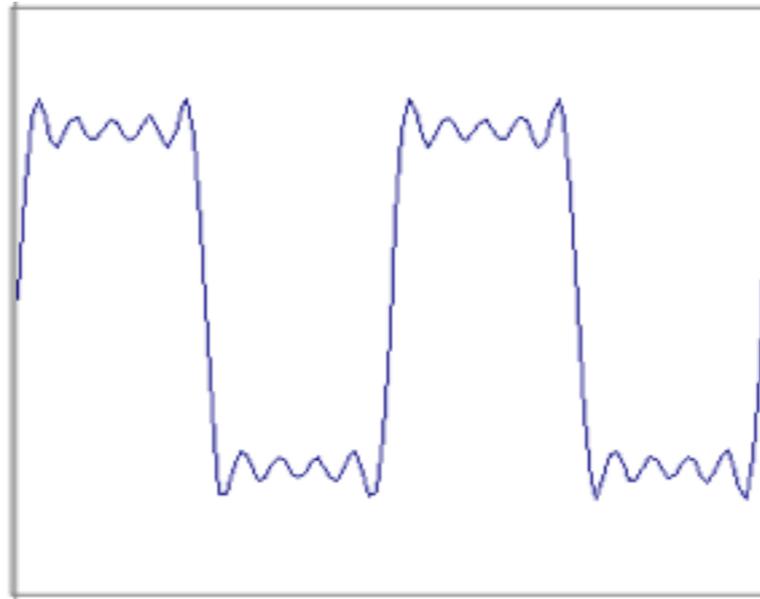
=



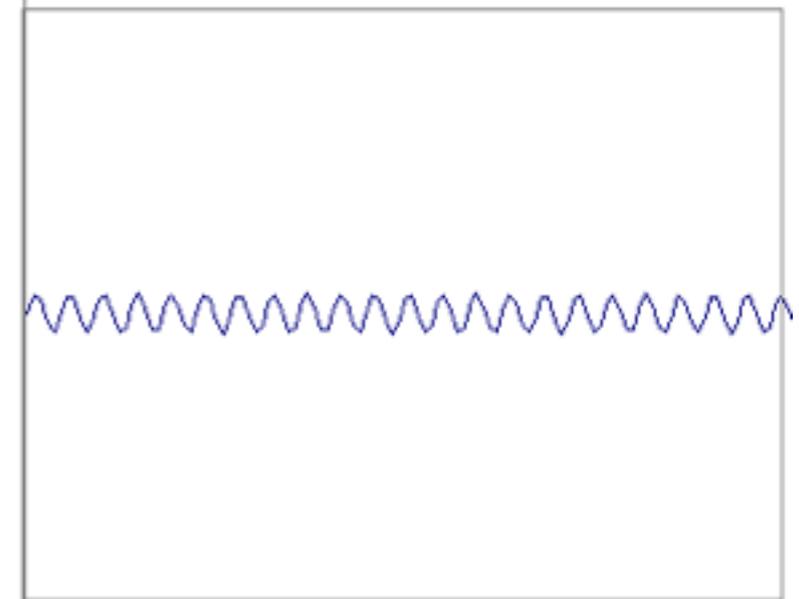
# Spectre en fréquences



=



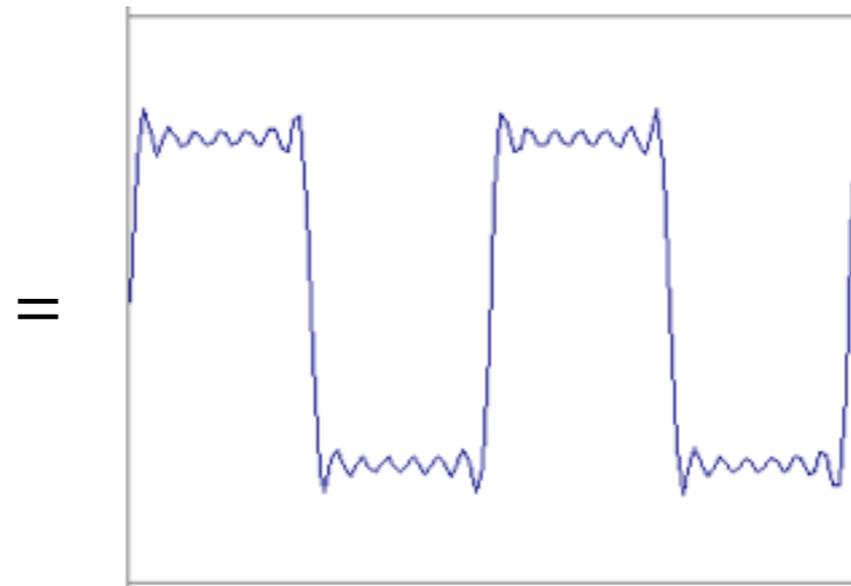
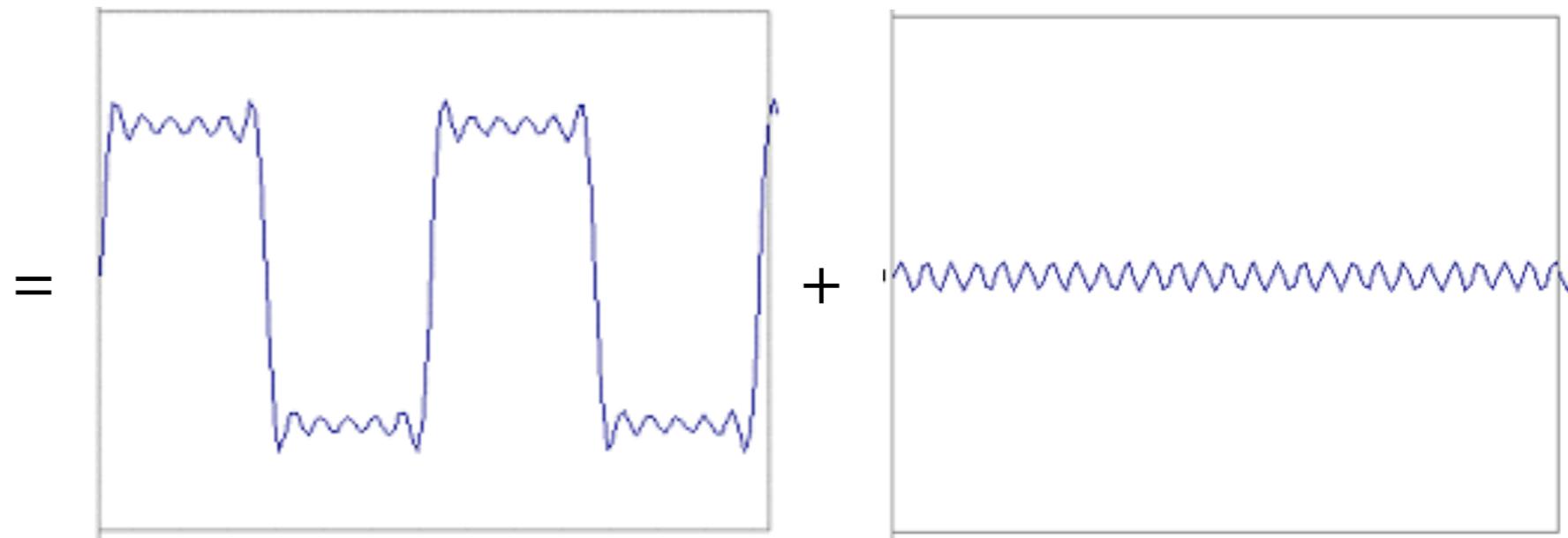
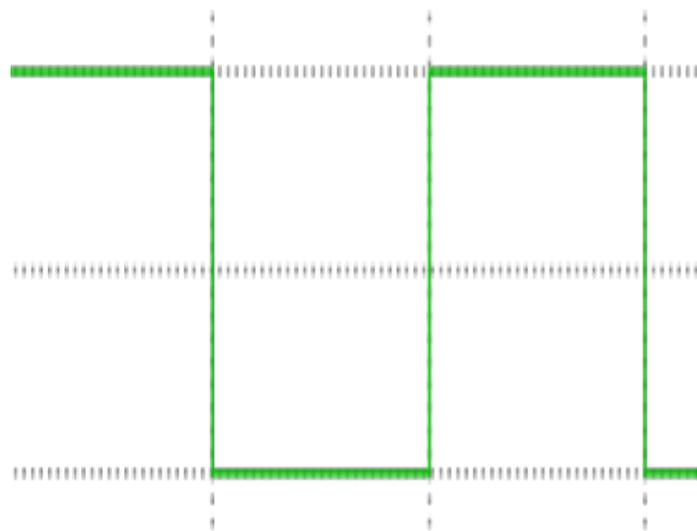
+



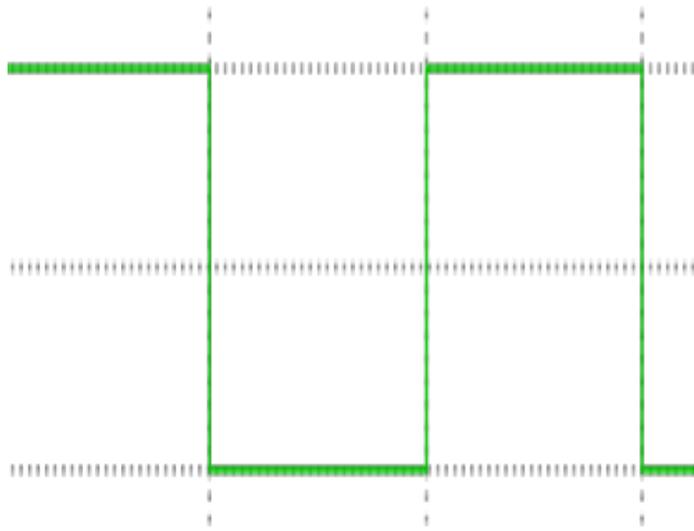
=



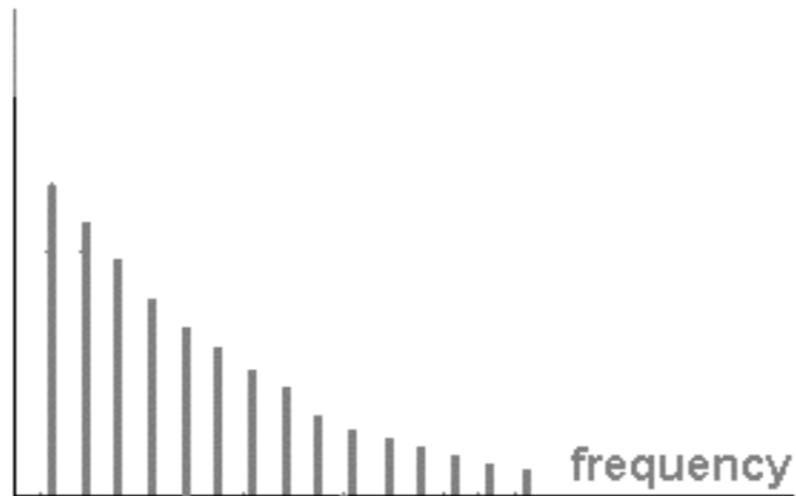
# Spectre en fréquences



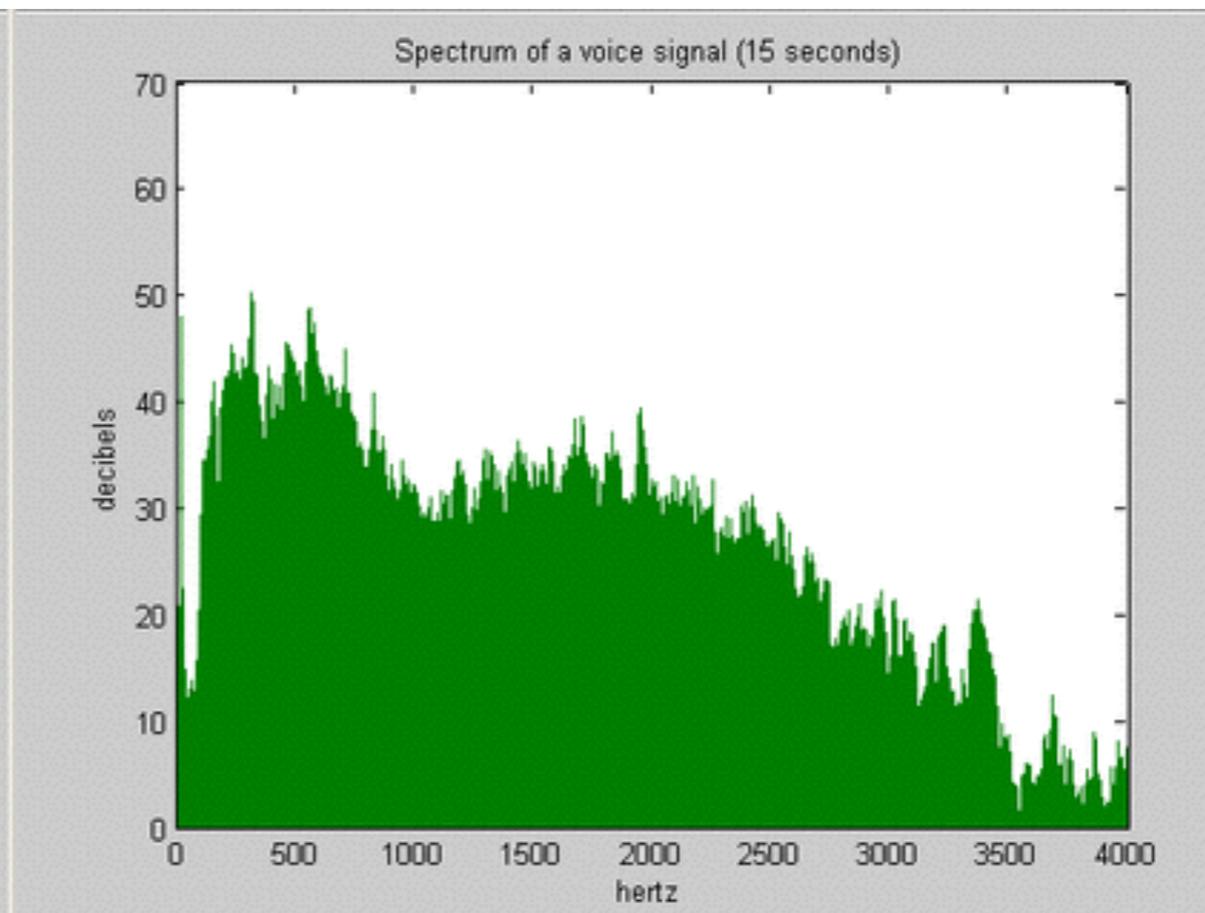
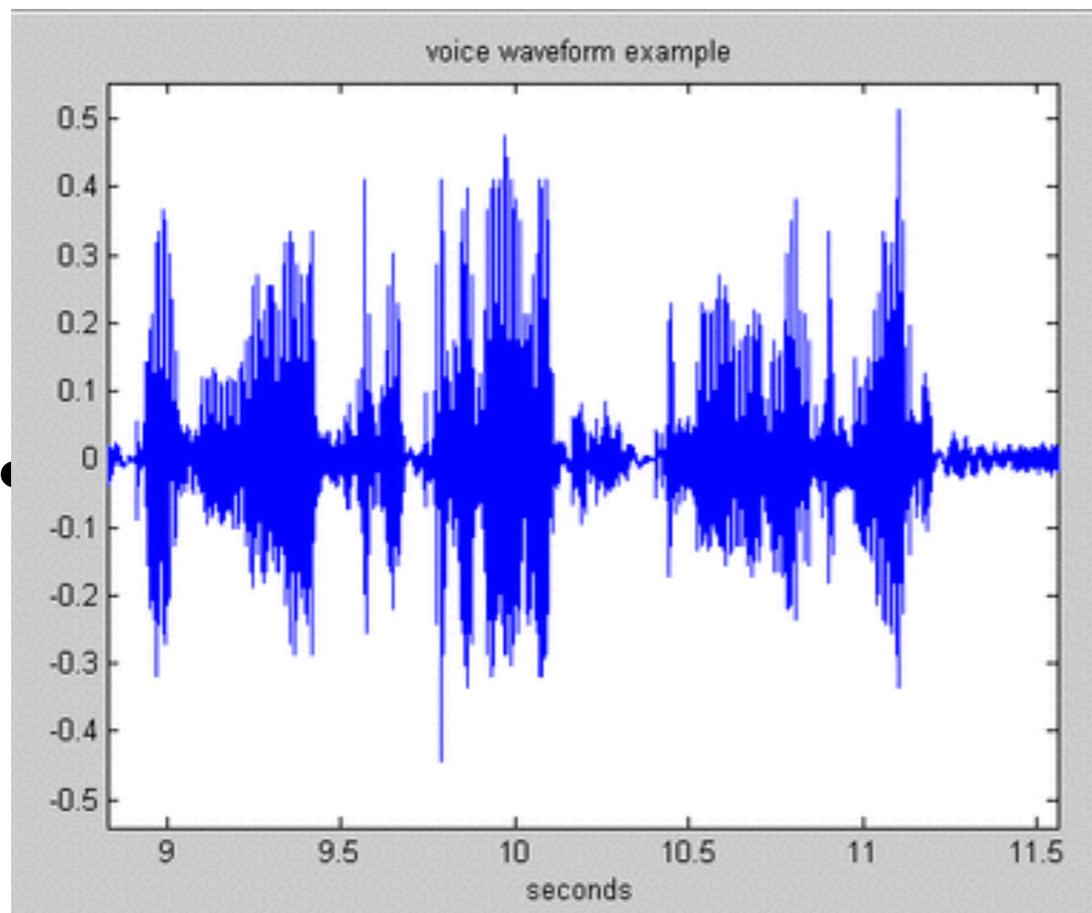
# Spectre en fréquences



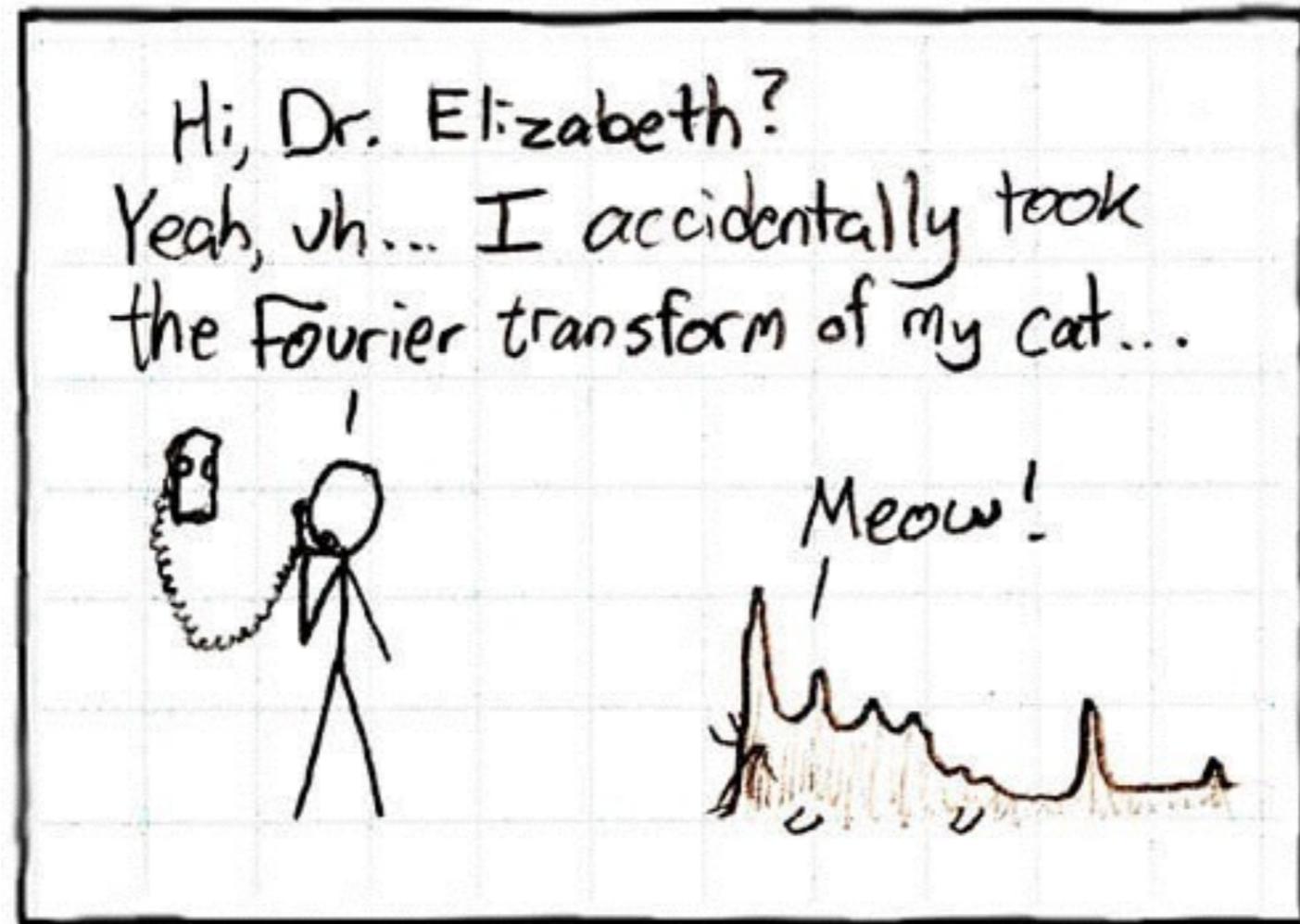
$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi kt)$$



# Example: musique

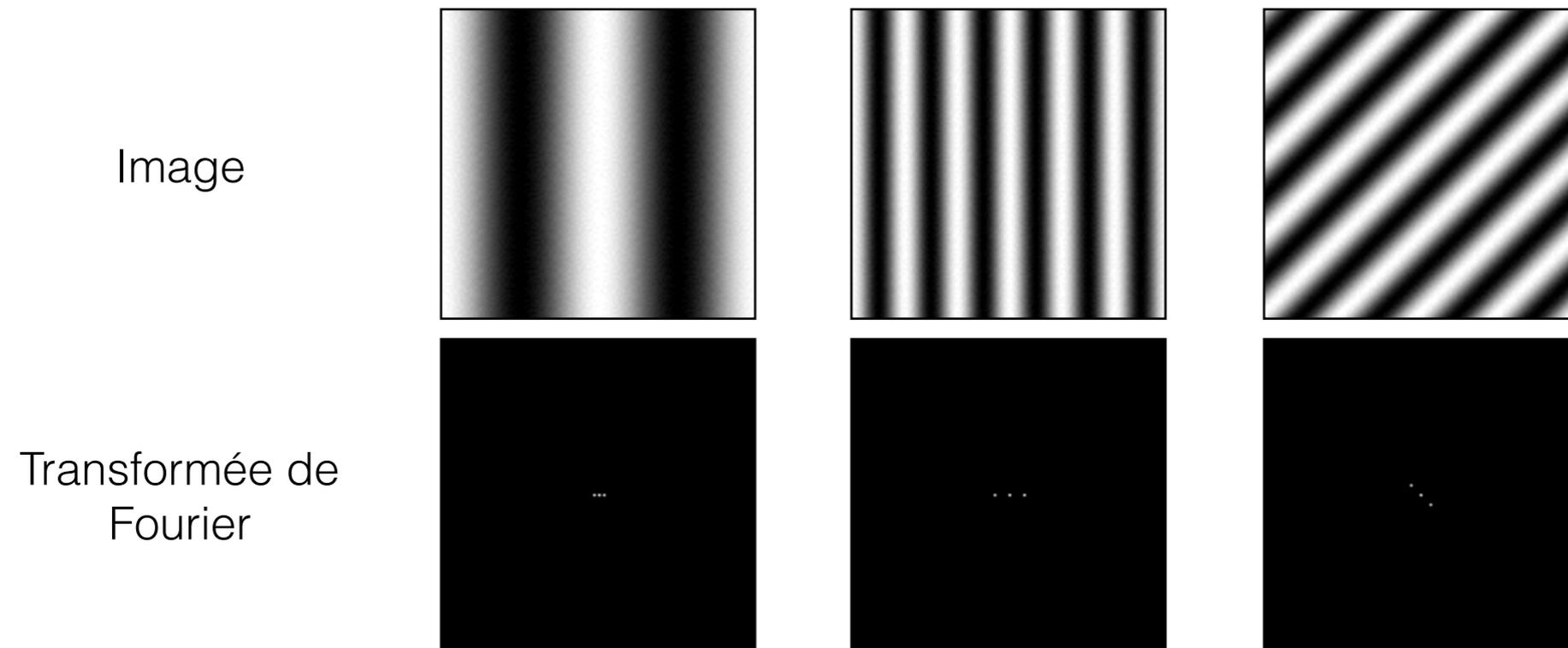


# Autres signaux

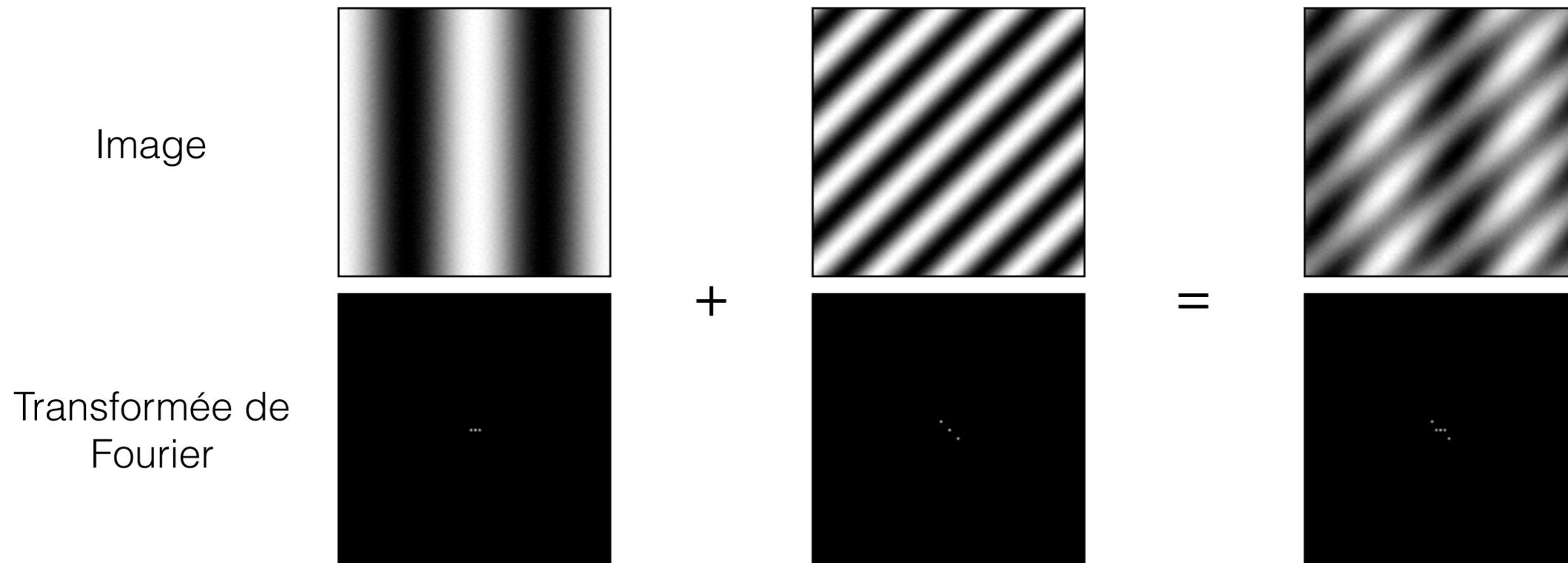


xkcd.com

# Transformée de Fourier dans les images

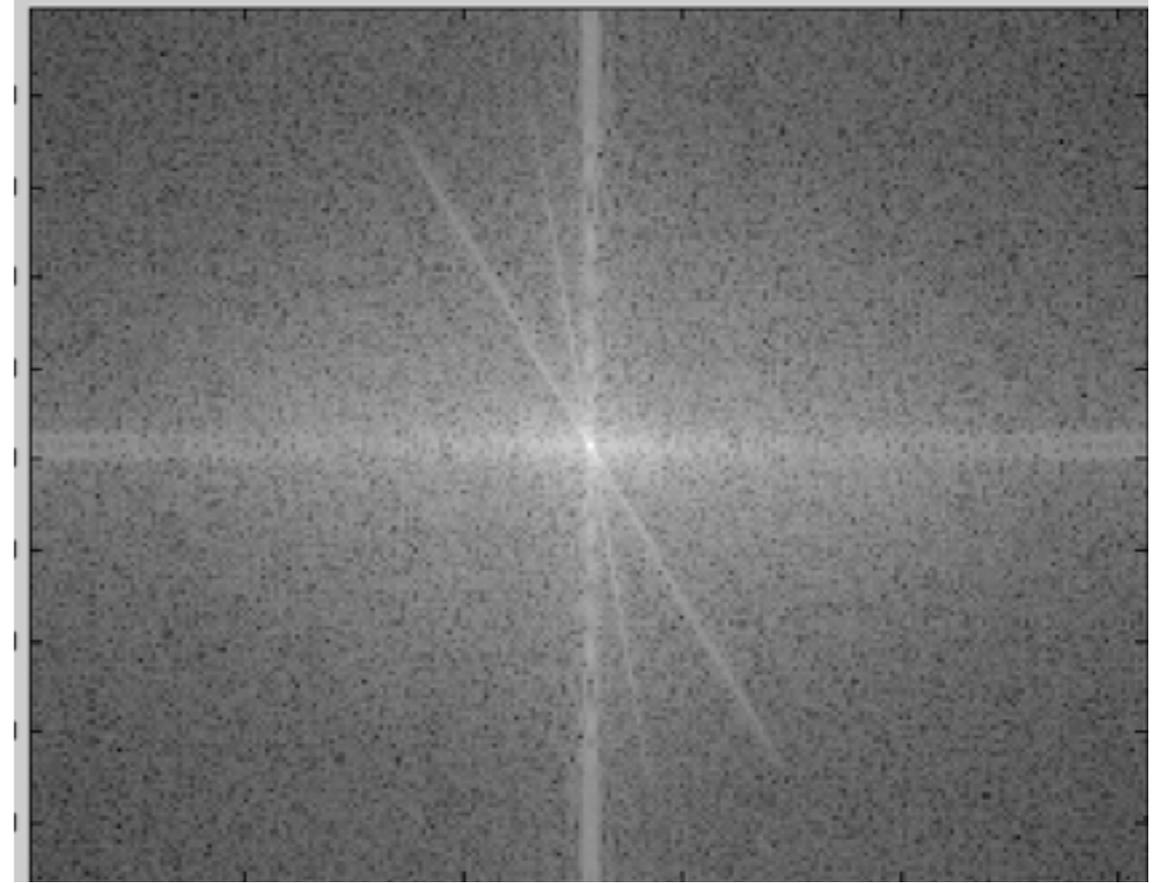


# On peut composer les images



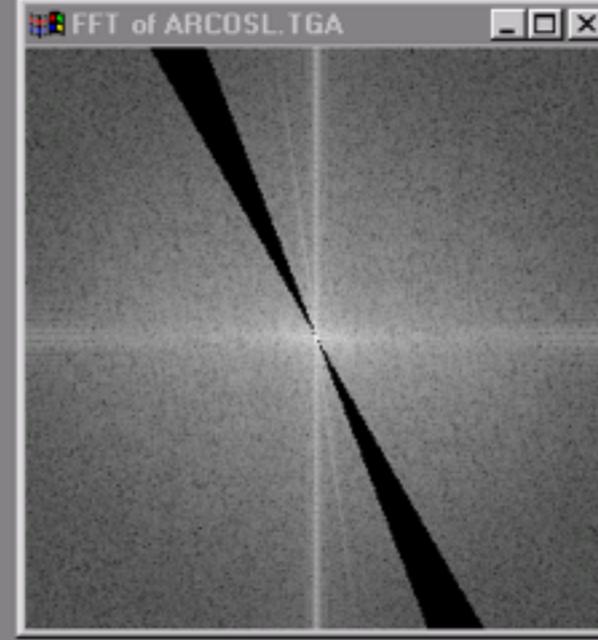
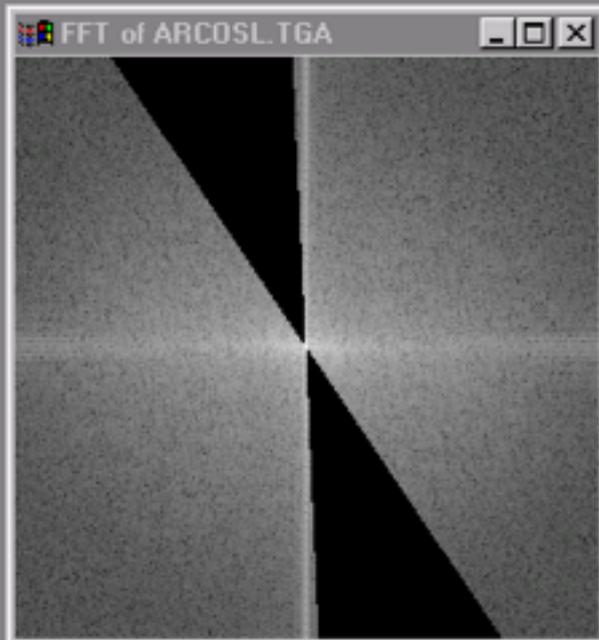
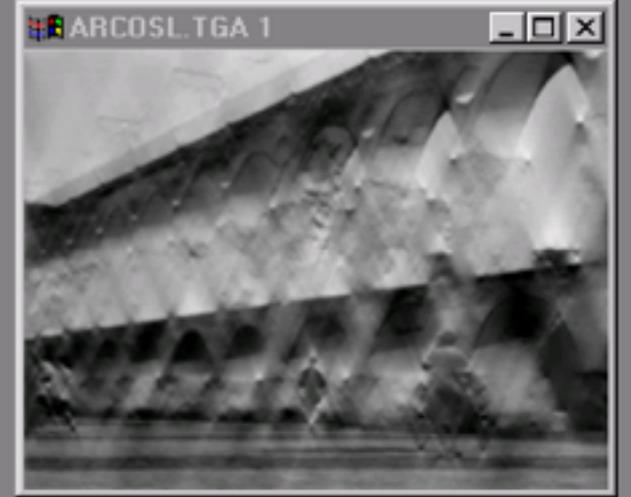
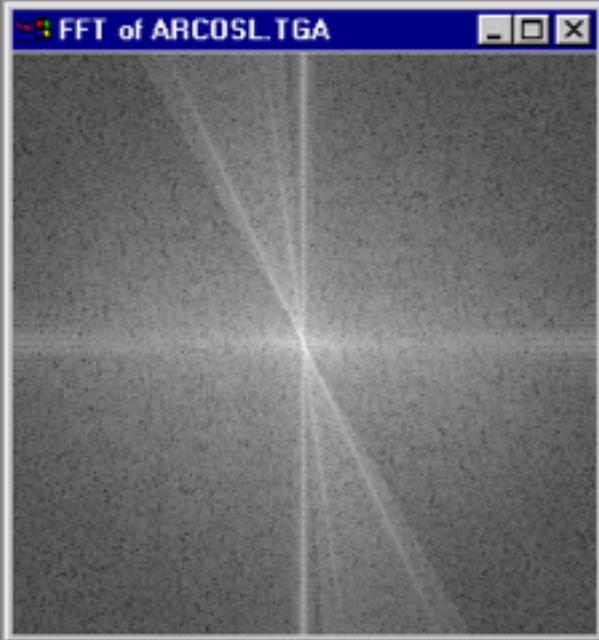
# Démonstration

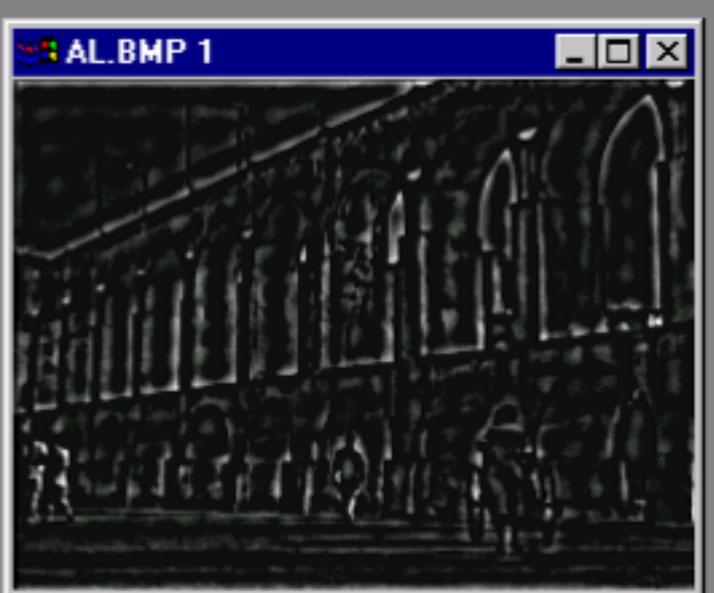
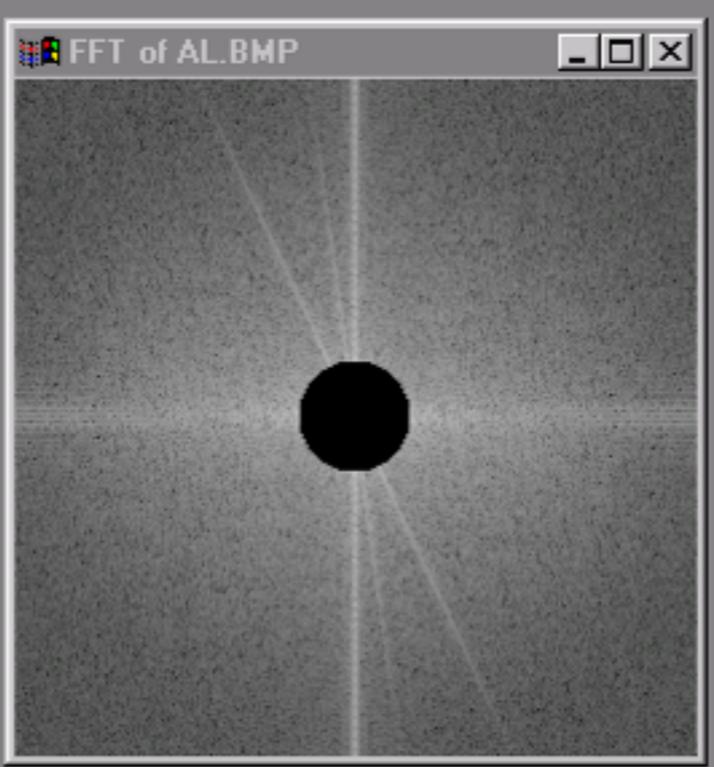
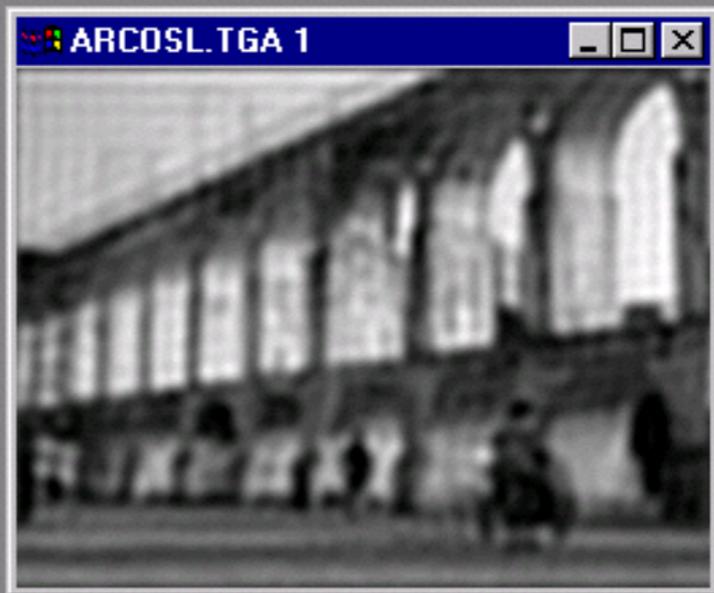
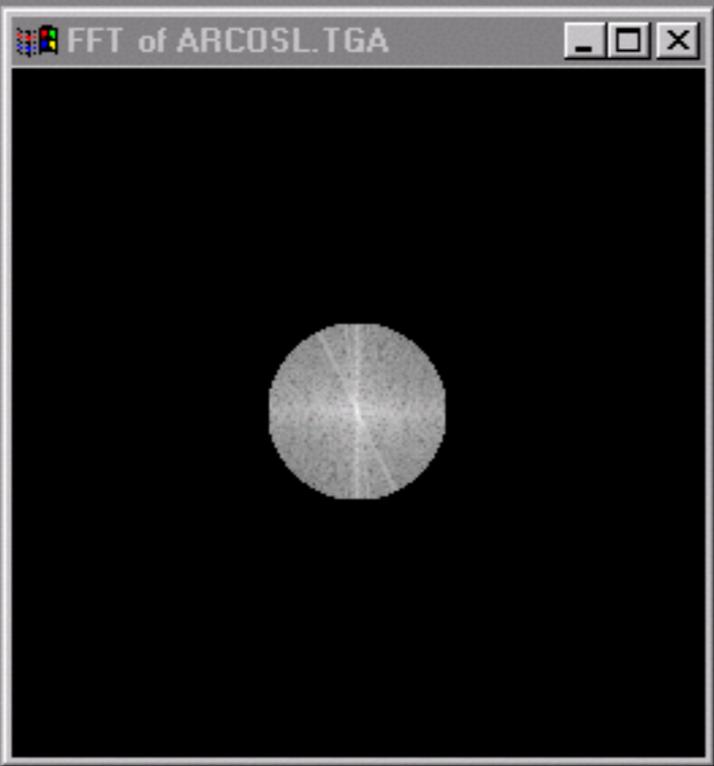
Calculer une FFT



# Démonstration

Manipulation de la FFT





# Le théorème de la convolution

- La transformée de Fourier d'une convolution de deux fonctions est le produit de leur transformée de Fourier

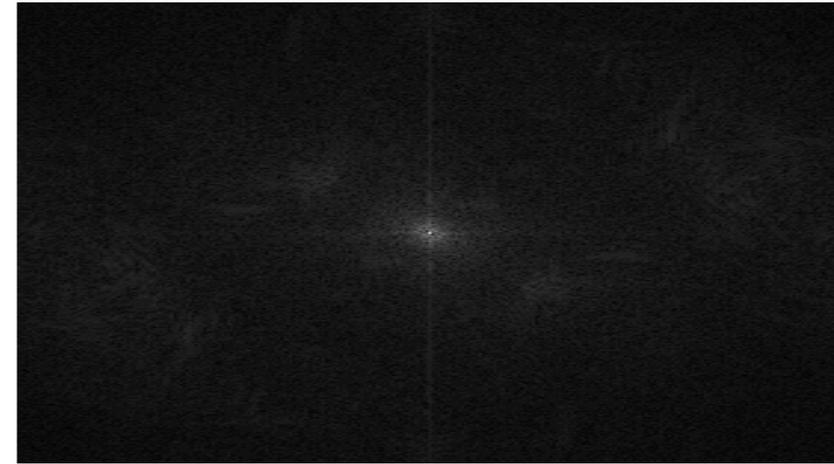
$$F(g * h) = F(g)F(h)$$

- La convolution dans le domaine spatial est équivalent à la multiplication dans le domaine spectral

Domaine spatial  
convolution

Domaine spectral (des fréquences)  
multiplication

$f(x,y)$

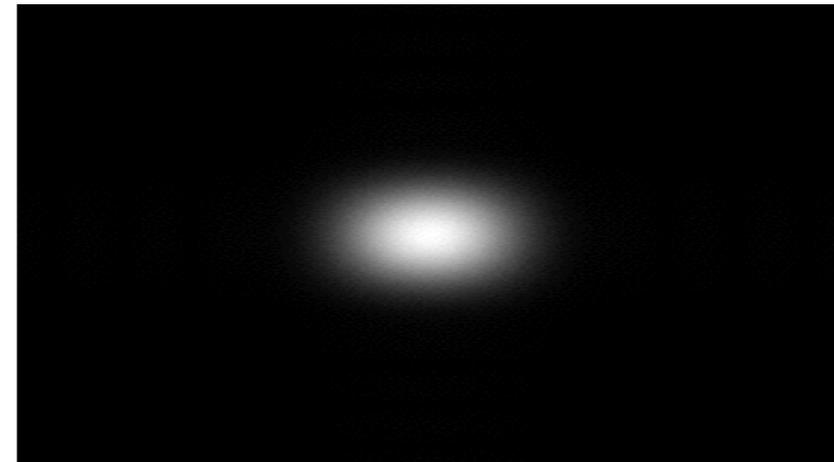
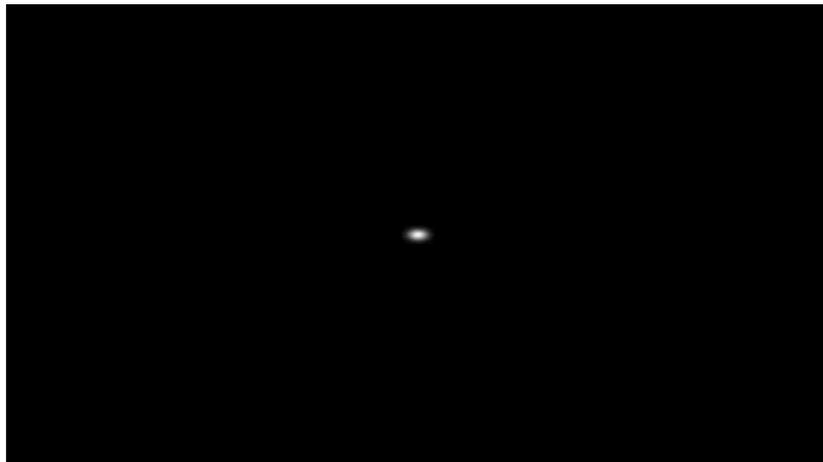


$|F(s_x,s_y)|$

\*

x

$h(x,y)$



$|H(s_x,s_y)|$

⇓

⇓

$g(x,y)$



$|G(s_x,s_y)|$

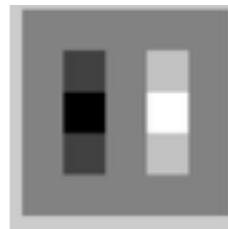
# Filterage spatial

1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1

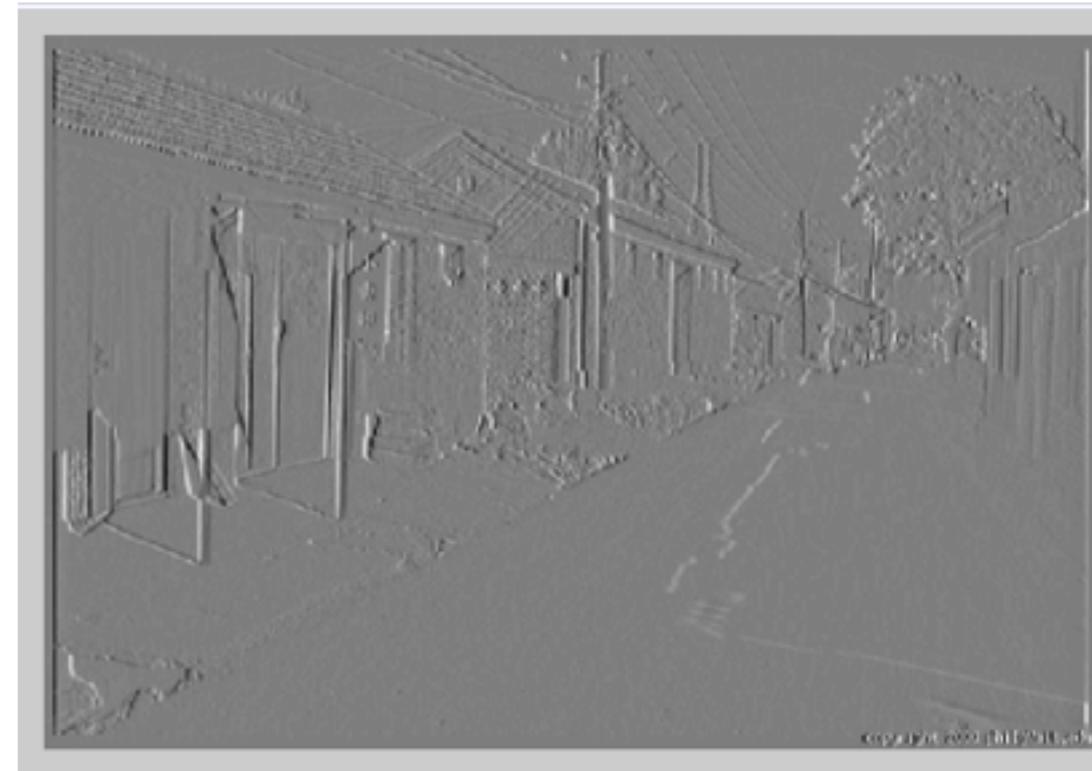
intensity image



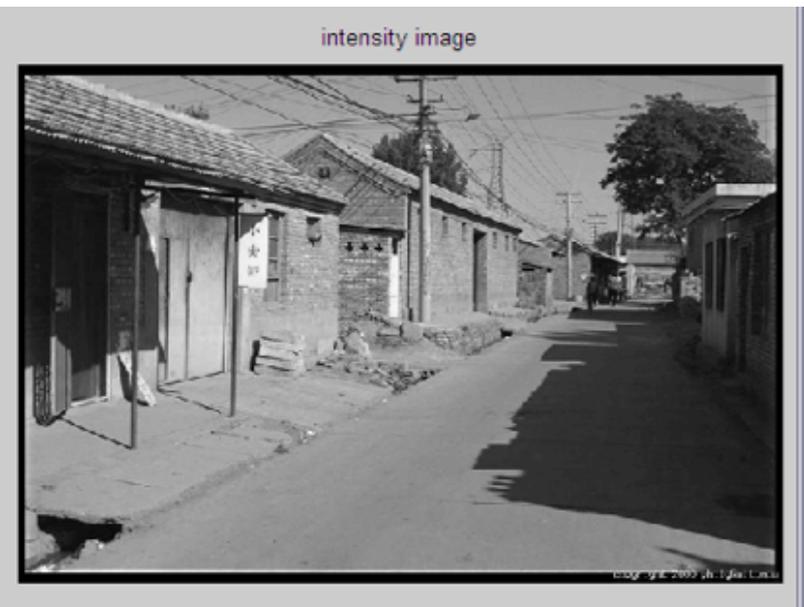
\*



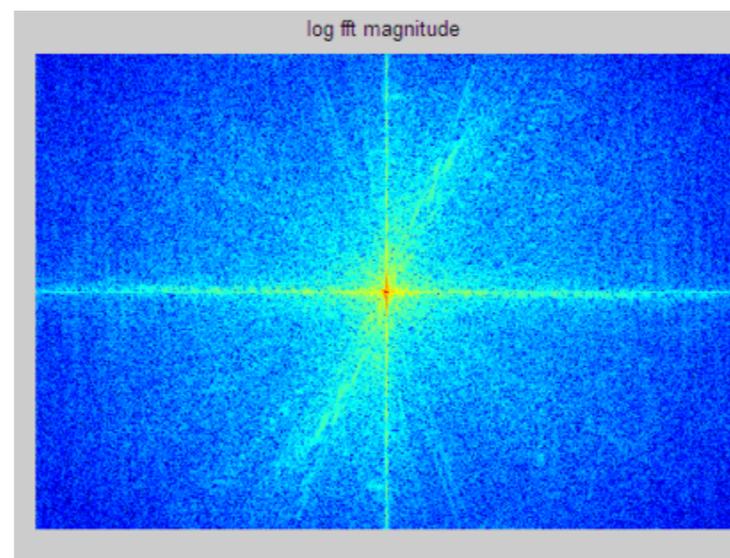
=



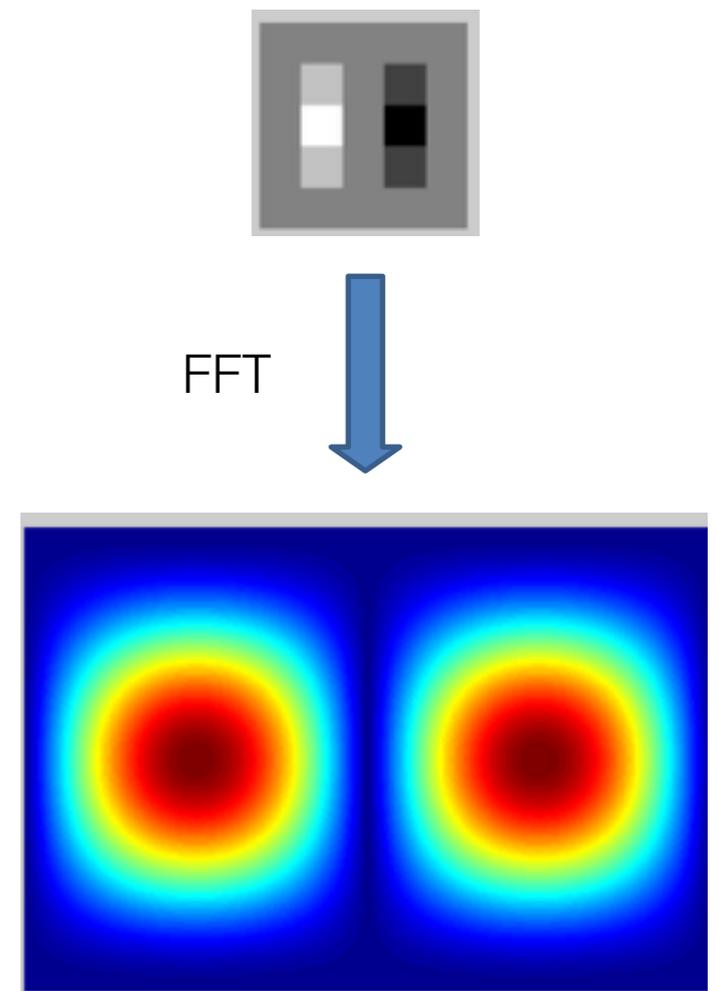
# Filterage spectral



FFT

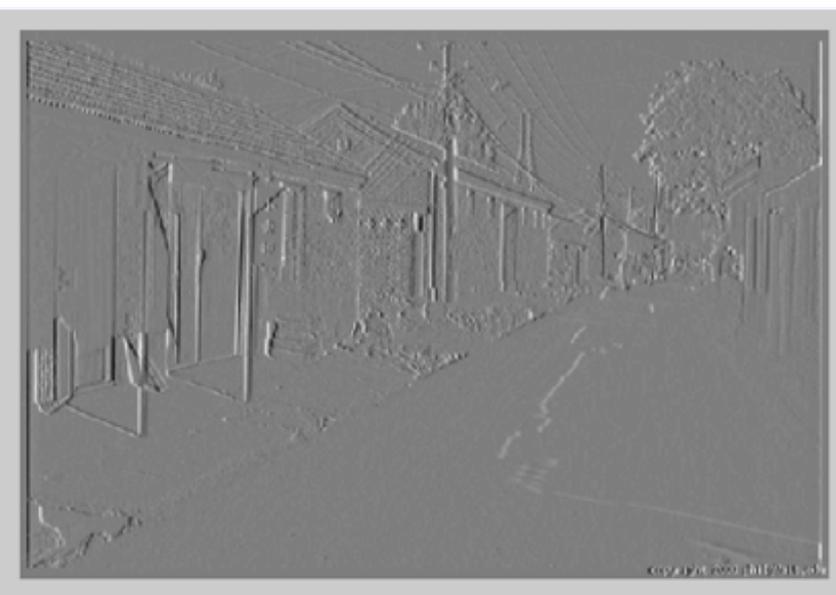
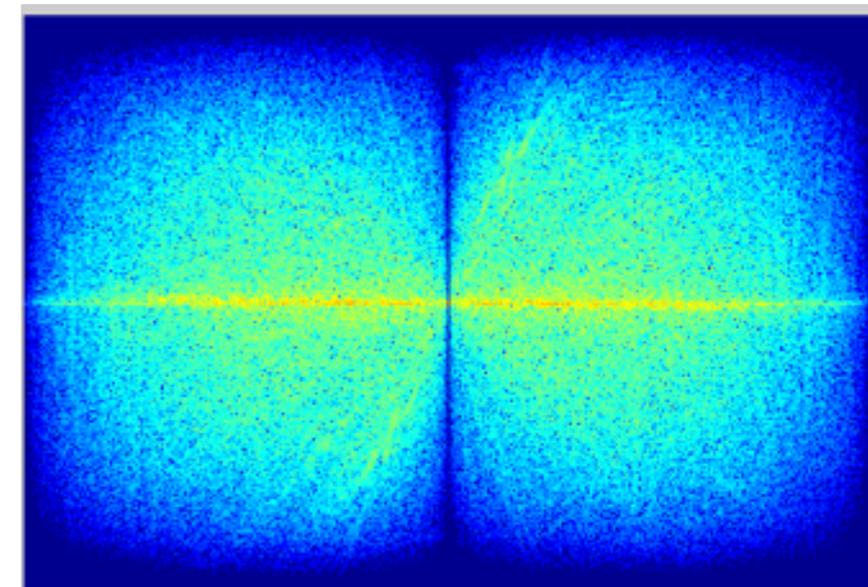


$\times$



$\parallel$

FFT inverse

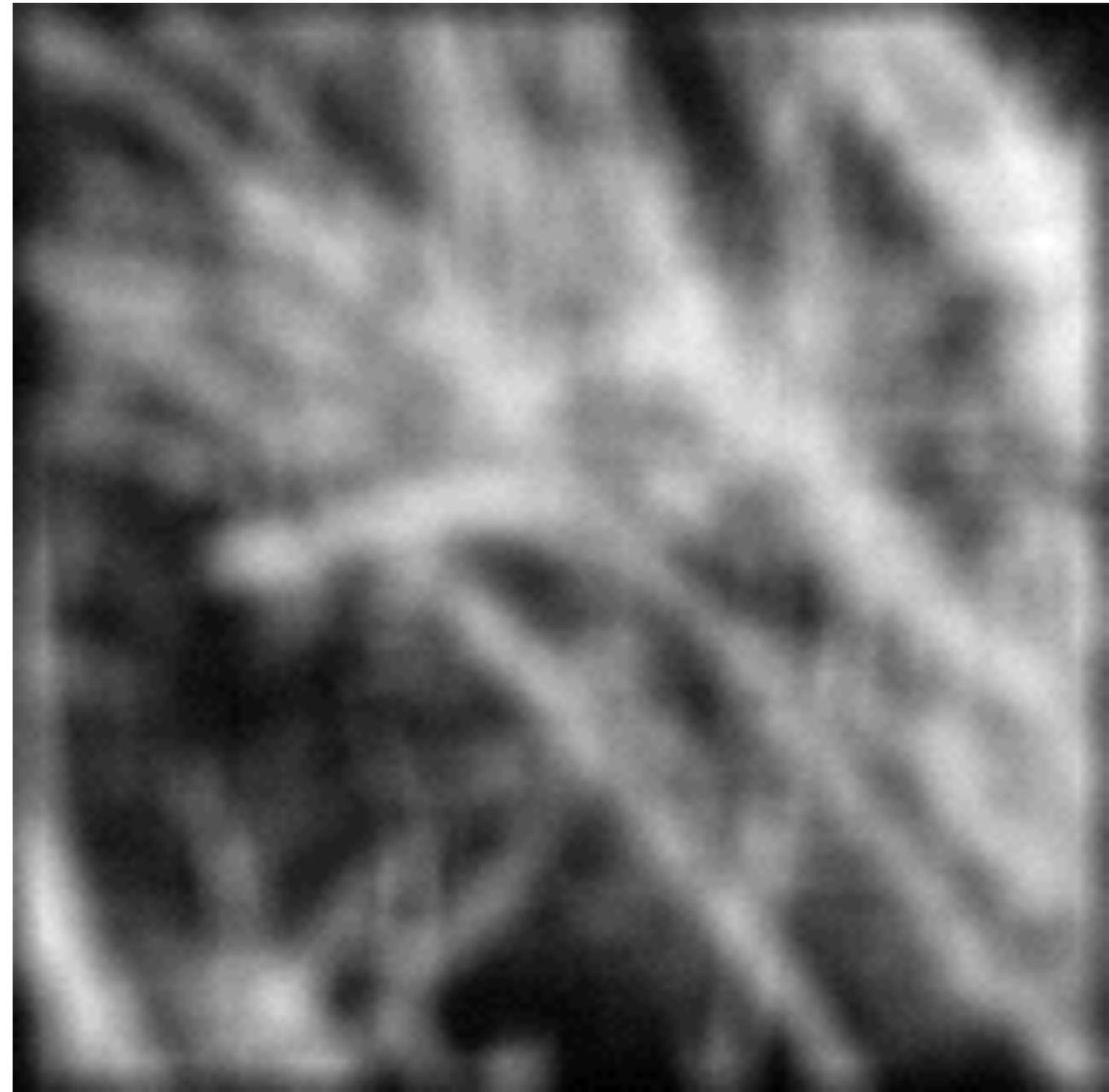
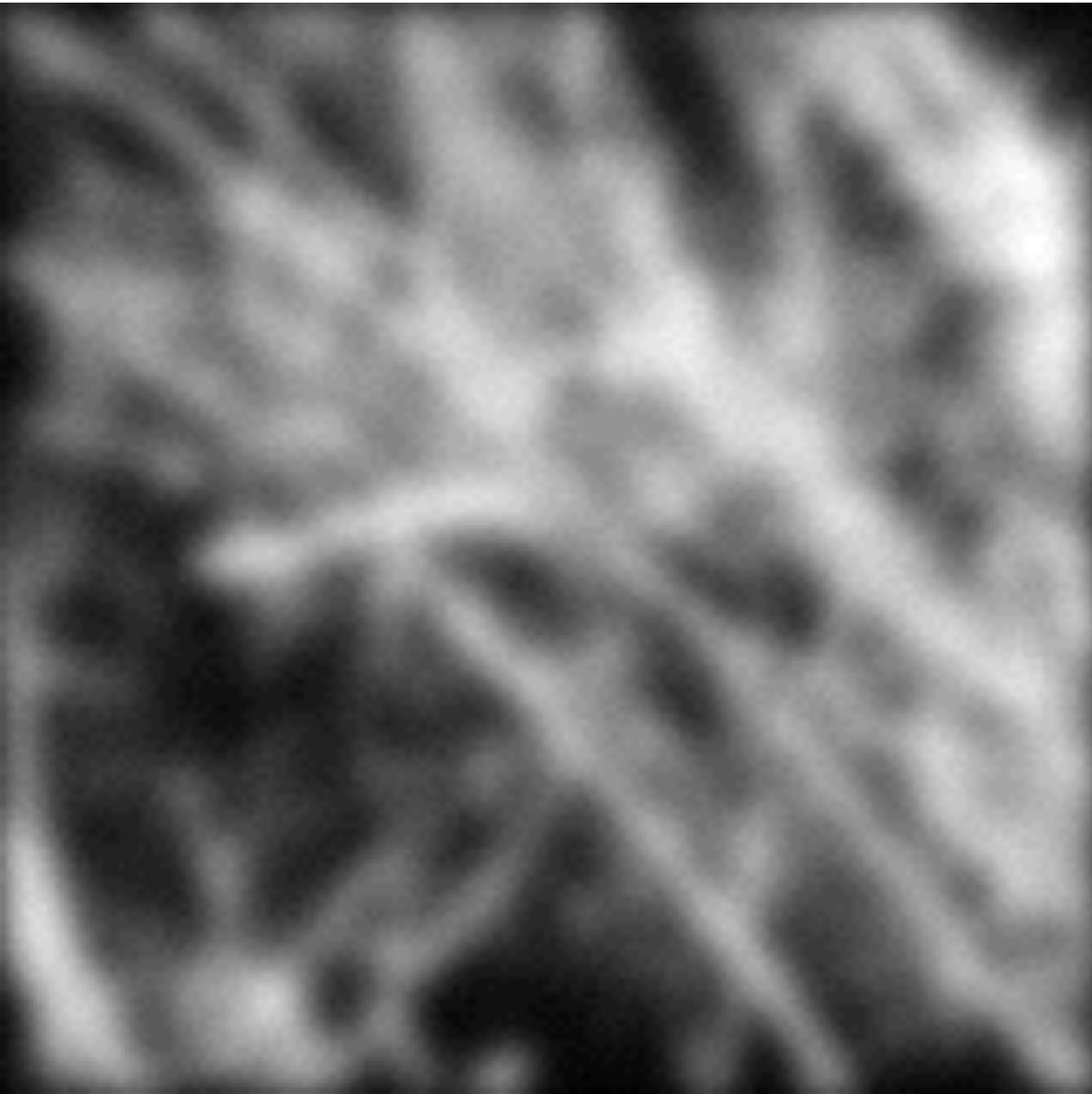


# Démonstration

Filtrage spectral



Pourquoi le filtre gaussien nous donne une image lisse,  
mais pas le filtre boîte?



Pourquoi une image à plus faible résolution est toujours compréhensible?  
Quelle est l'information perdue?



Image: <http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/>

# Réduction de taille d'un facteur 2



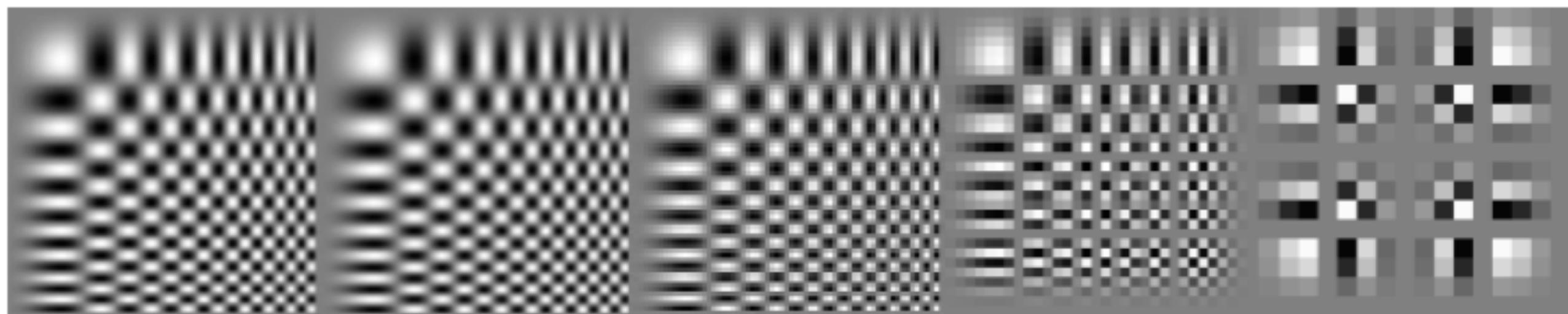
256x256

128x128

64x64

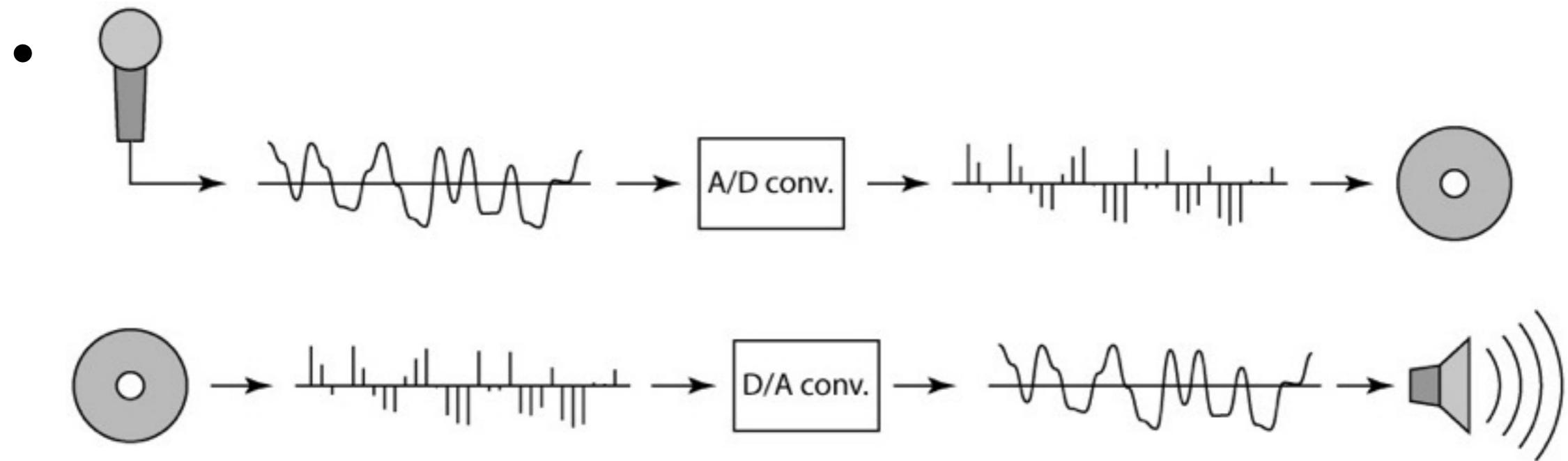
32x32

16x16

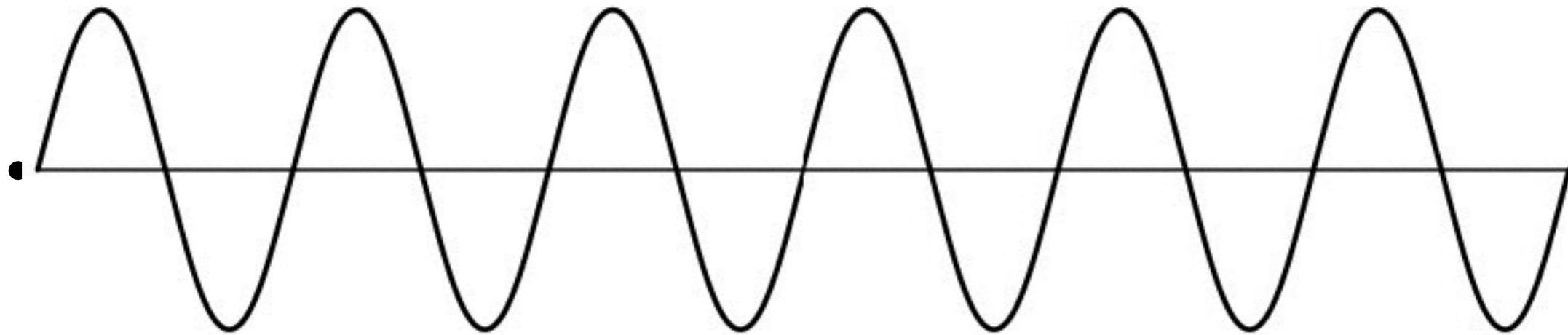


# Exemple: 1D (audio)

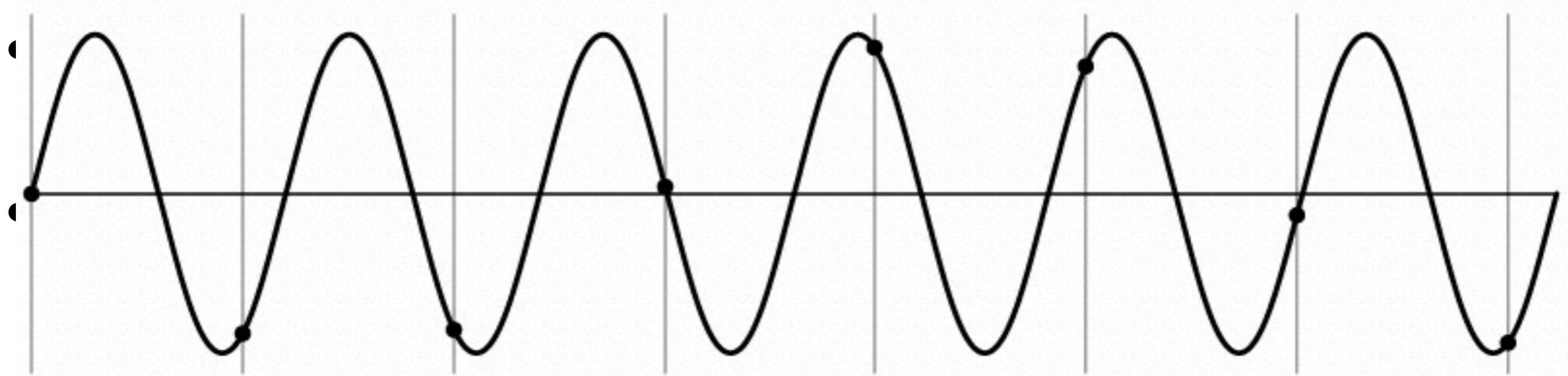
- Enregistrement: son -> échantillons numériques



# Échantillonnage et reconstruction

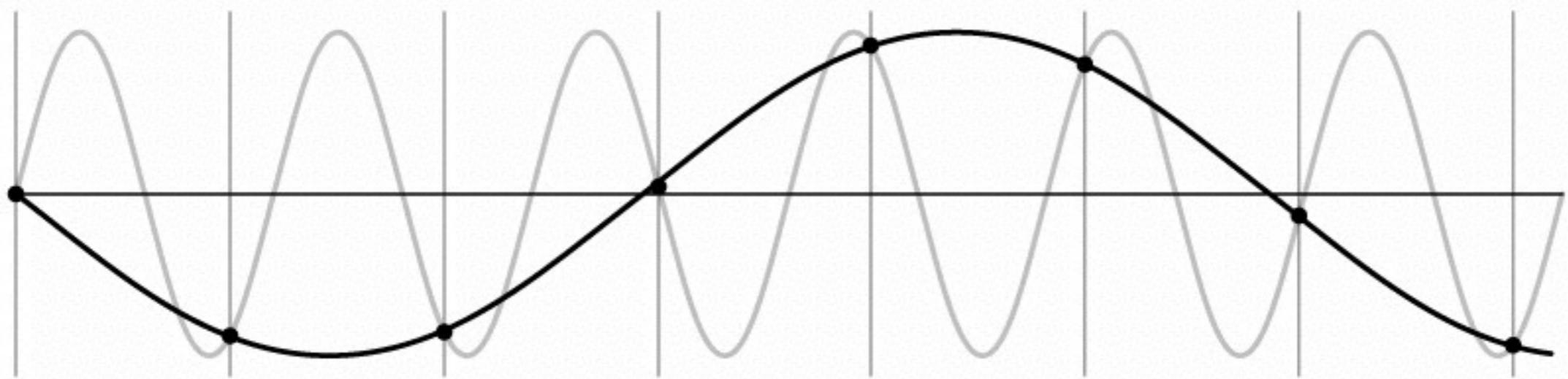


# Échantillonnage et reconstruction



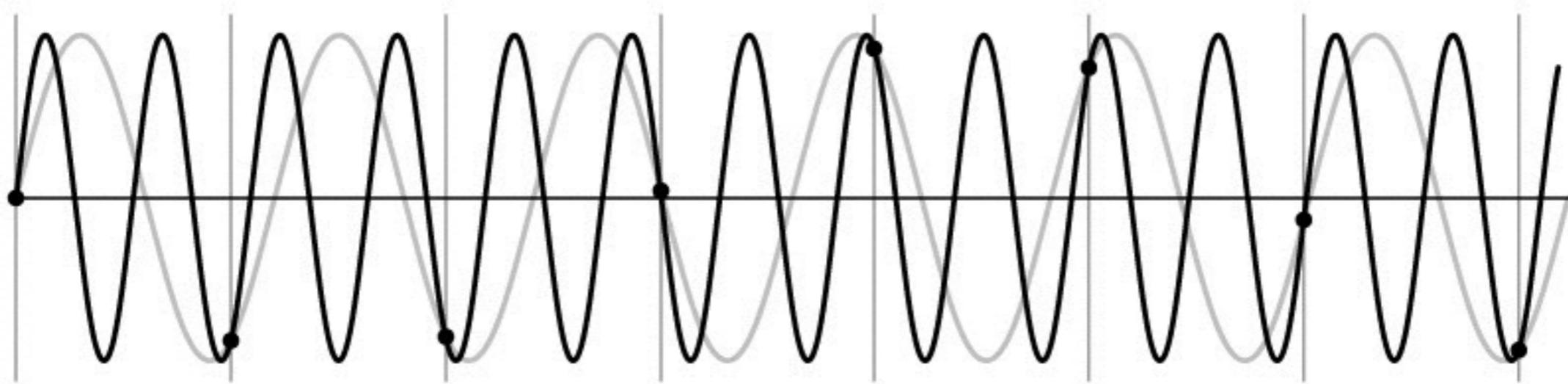
# Échantillonnage et reconstruction

- Surprise: le signal reconstruit est confondu avec un *autre* signal, à fréquence plus faible



# Recouvrement spectral

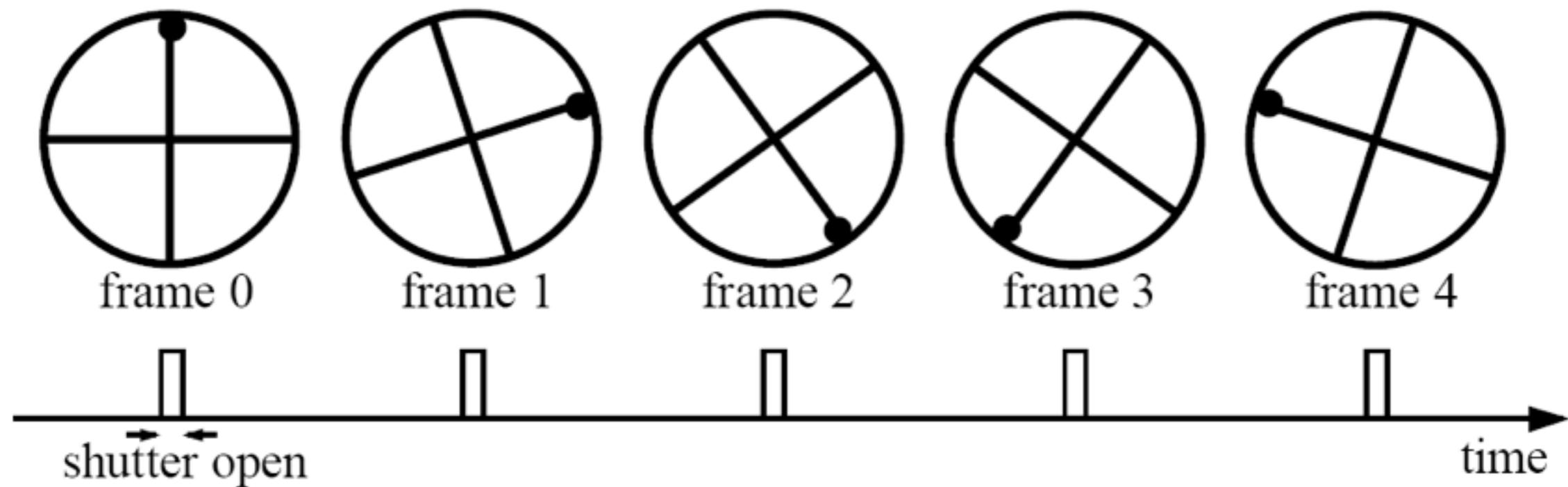
- Signaux de fréquences différentes “déguisés” dans notre signal original



# Recouvrement spectral

- L'échantillonnage peut être dangereux!
- Erreurs typiques:
  - “Roues tournant à l'envers”
  - “Jeu d'échec disparaissant à distance”
  - “Texture des vêtements à la télé”

# Recouvrement spectral dans les vidéos



[https://www.youtube.com/watch?v=B8EMI3\\_0TO0](https://www.youtube.com/watch?v=B8EMI3_0TO0)

# Recouvrement spectral en infographie



# À la télé....

<http://www.youtube.com/watch?v=jXEgnRWRJfg>

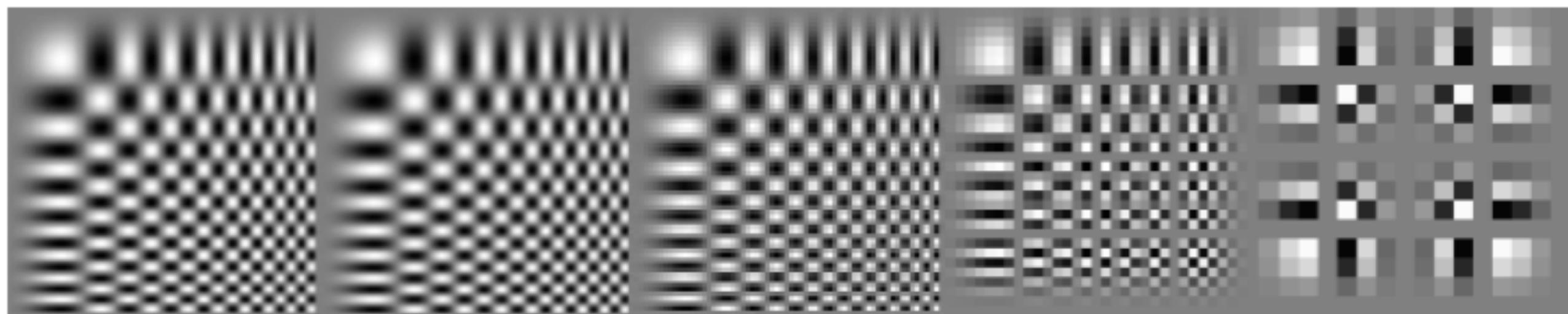
256x256

128x128

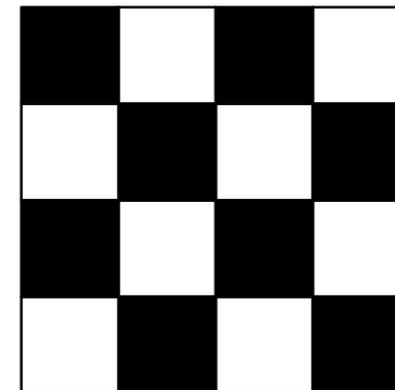
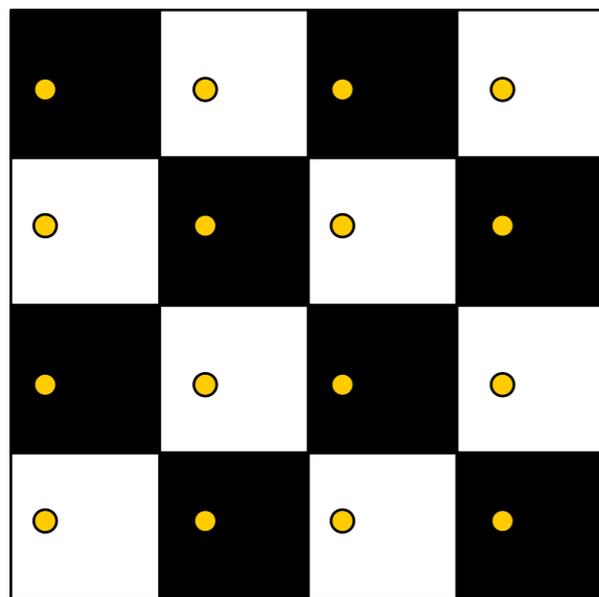
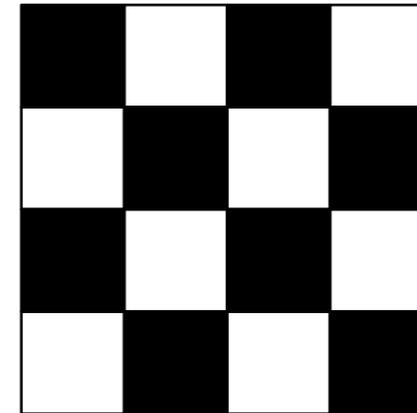
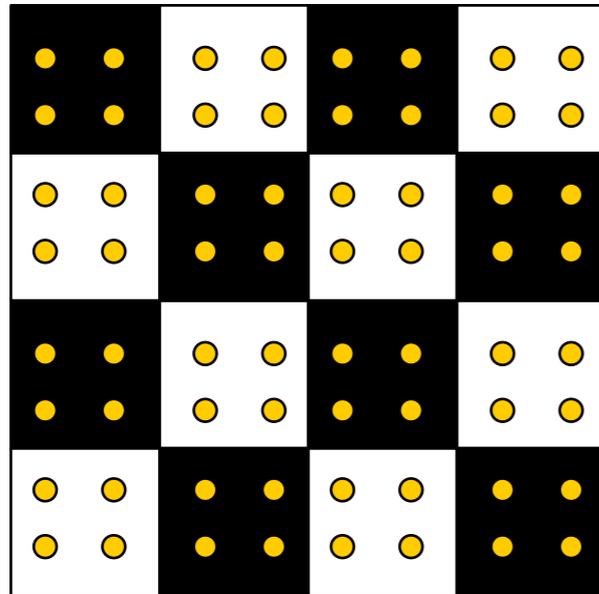
64x64

32x32

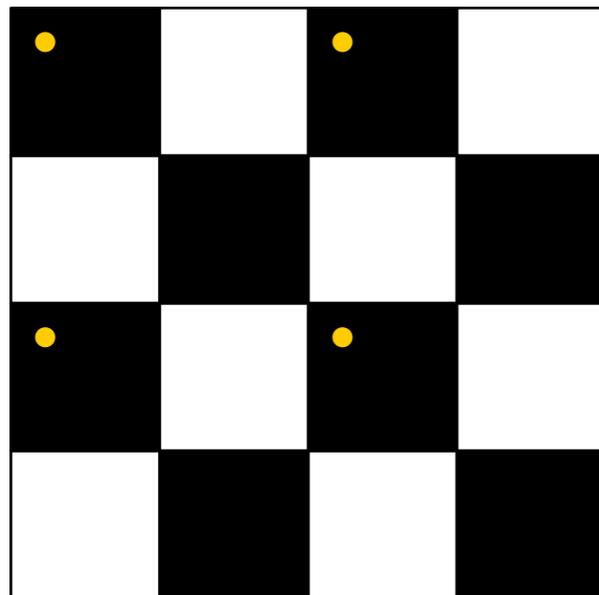
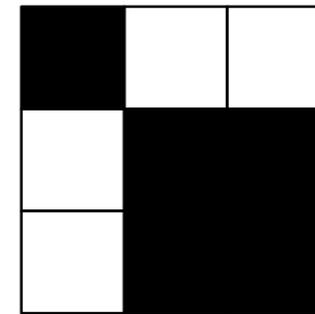
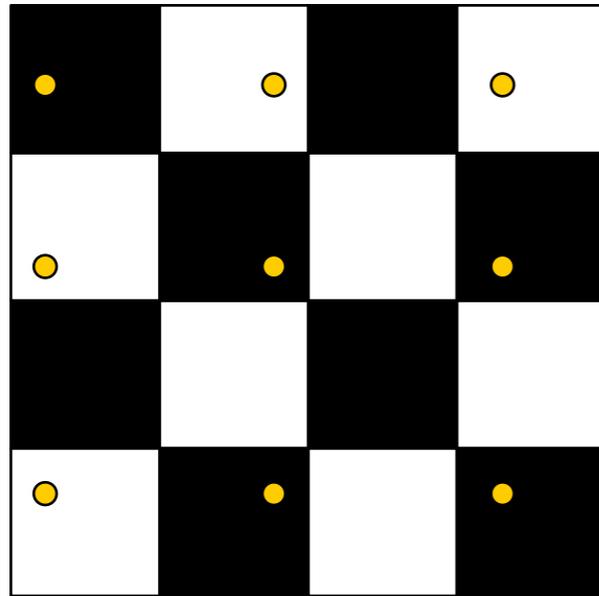
16x16



# Bon échantillonnage

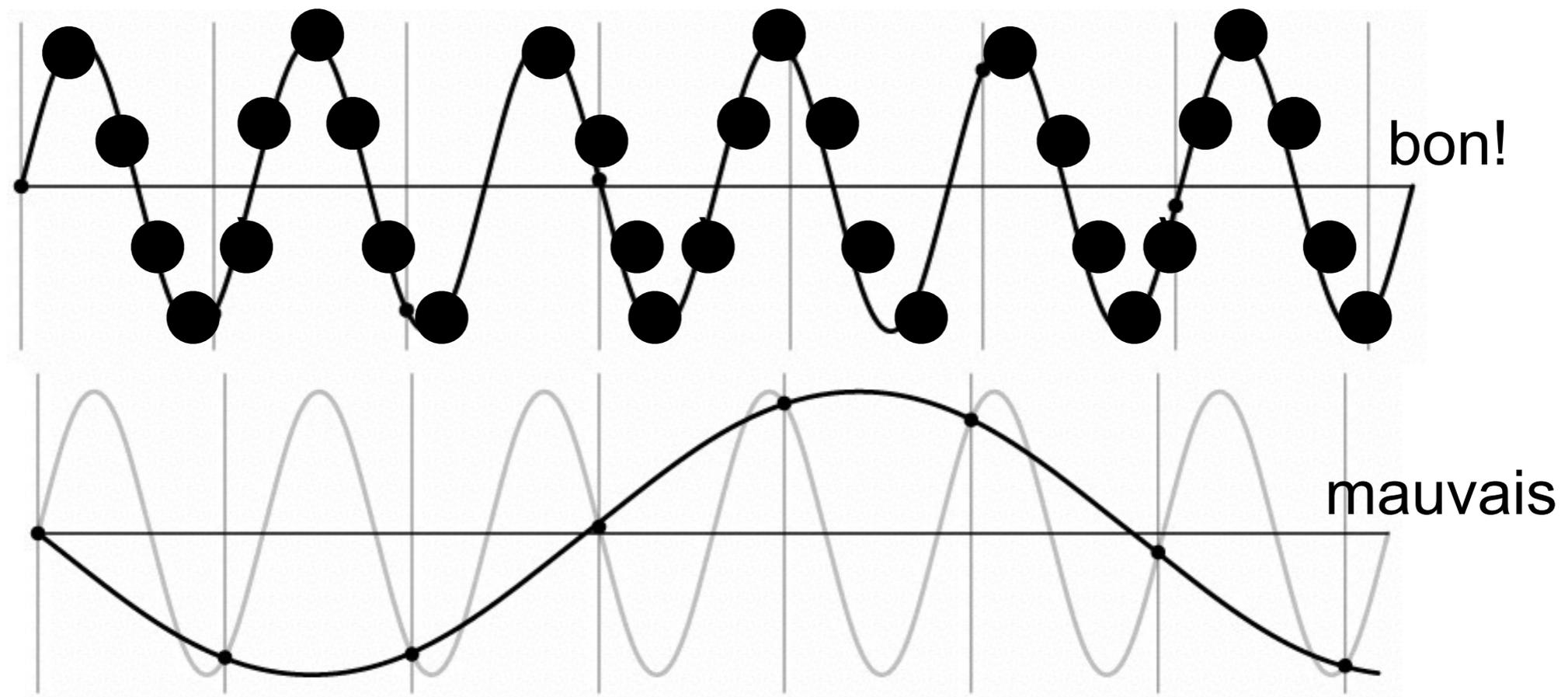


# Mauvais échantillonnage = recouvrement!



# Théorème d'échantillonnage Nyquist-Shannon

- La fréquence d'échantillonnage d'un signal devrait être  $\geq 2 \times f_{\max}$ 
  - $f_{\max}$  = fréquence maximale du signal
- Cette condition respectée garantit la reconstruction du signal original



# Anti-recouvrement (anti-aliasing)

- Solutions:
  - Augmenter la fréquence d'échantillonnage!
  - Réduire les fréquences qui sont plus grandes que la moitié de la fréquence d'échantillonnage
    - Perte d'information
    - Mieux que le recouvrement spectral!

# Démonstration

Recouvrement spectral

# Recouvrement spectral

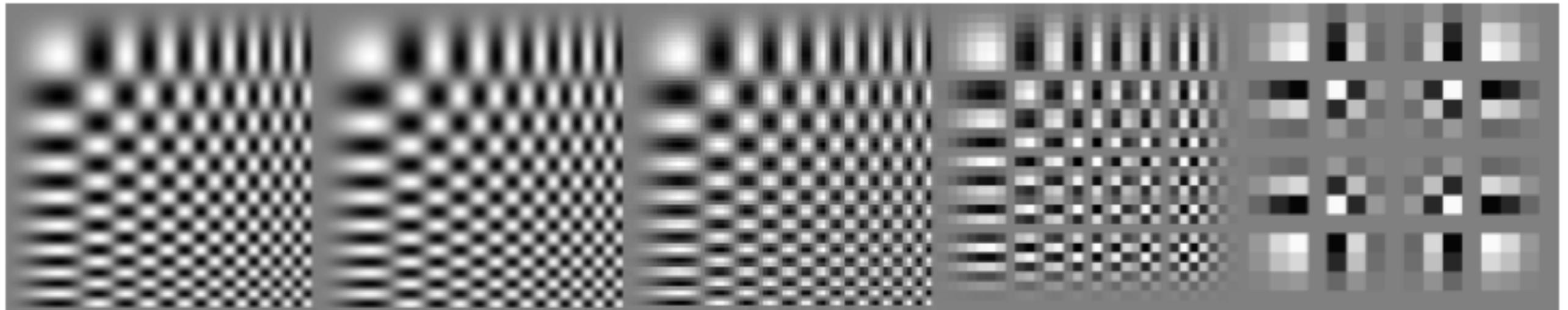
256x256

128x128

64x64

32x32

16x16



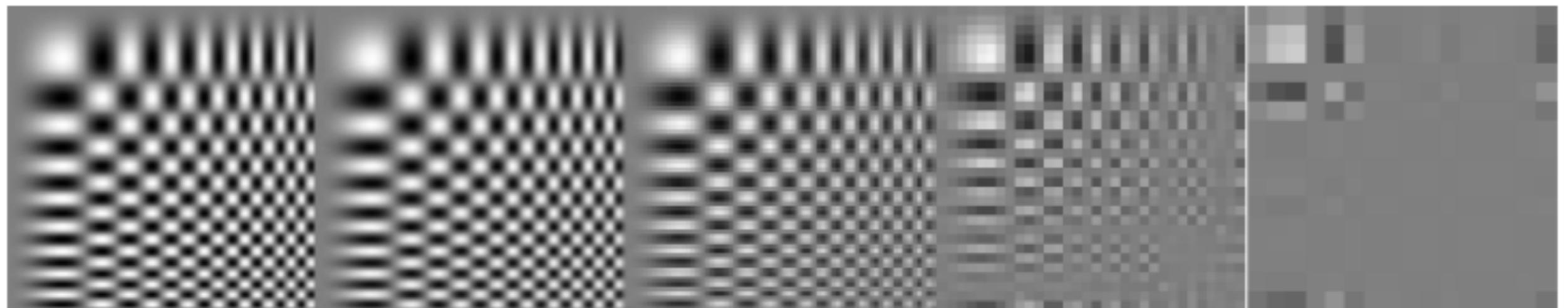
256x256

128x128

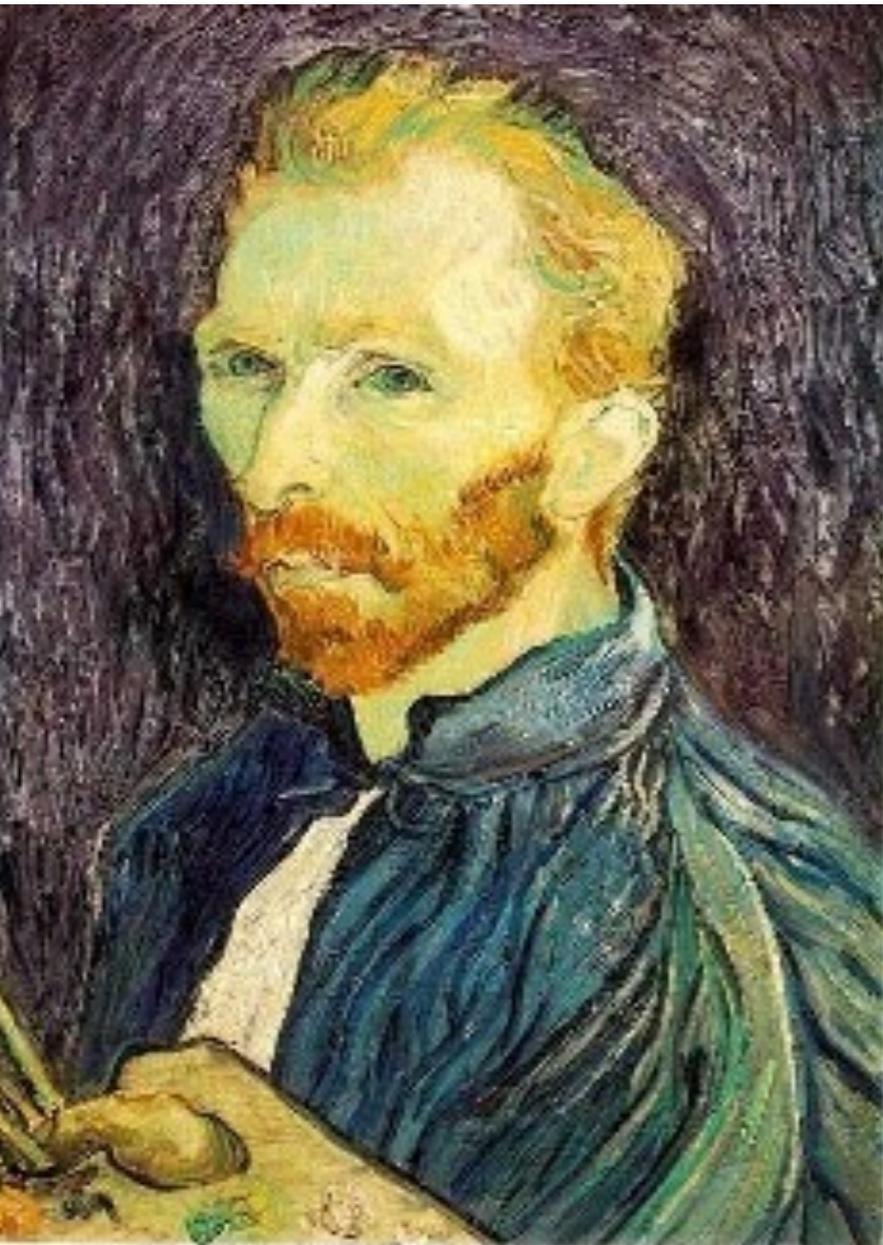
64x64

32x32

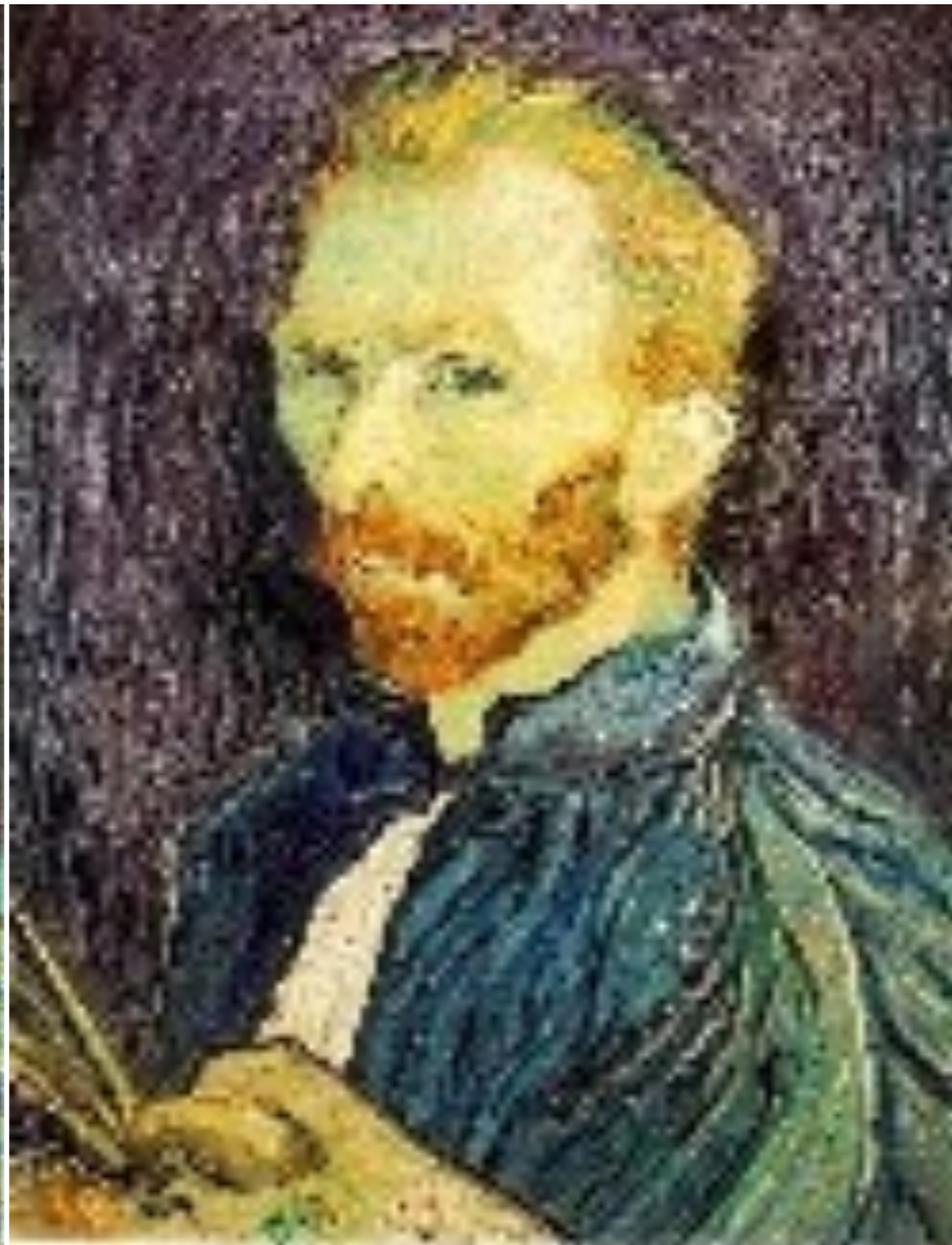
16x16



# Échantillonner sans filtrage



1/2



1/4 (2x zoom)

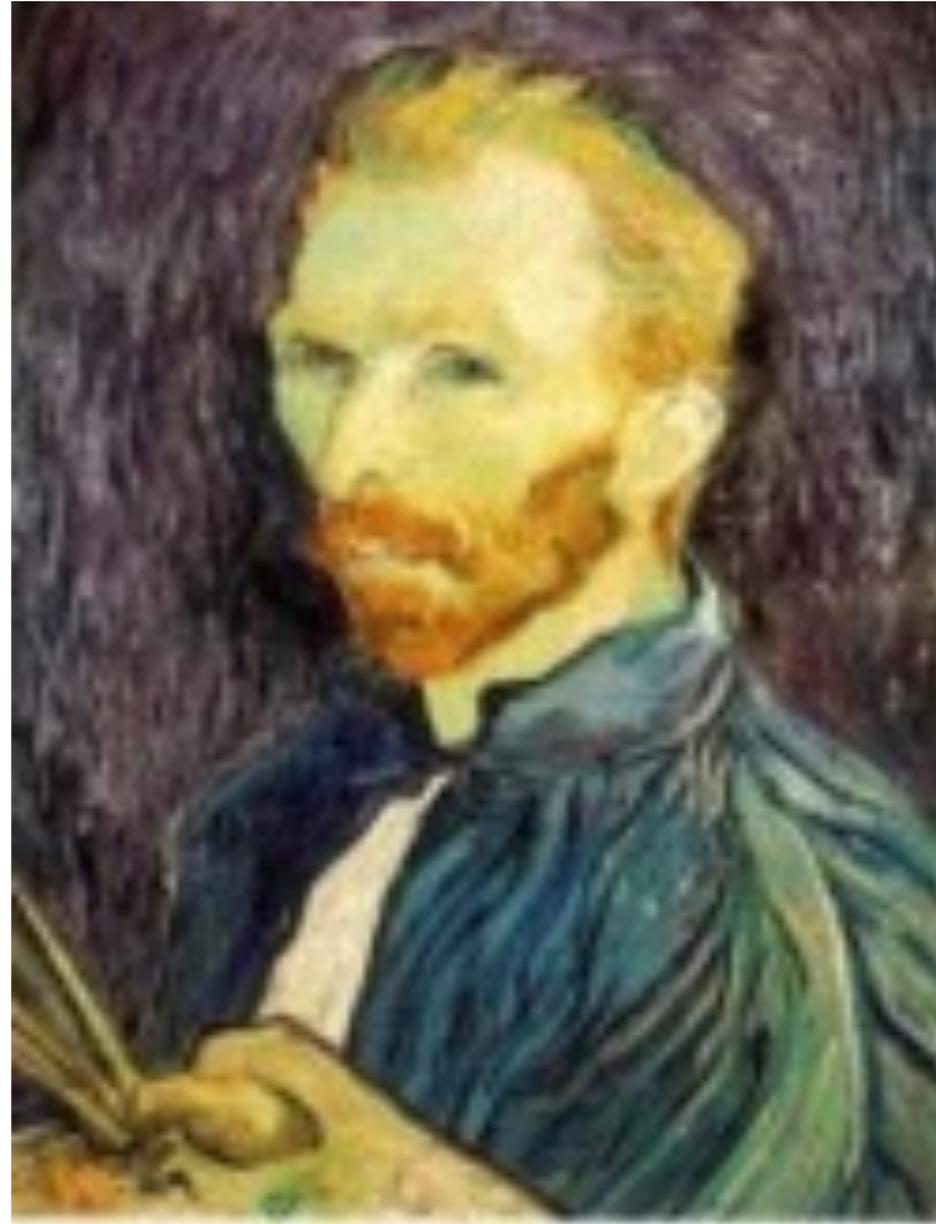


1/8 (4x zoom)

# Échantillonner avec filtrage



Gaussian  $1/2$



G  $1/4$



G  $1/8$