Filtrage, domaine fréquentiel

GIF-4105/7105

Photographie Algorithmique

Jean-François Lalonde

Administration

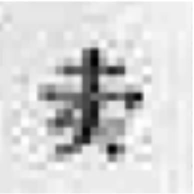
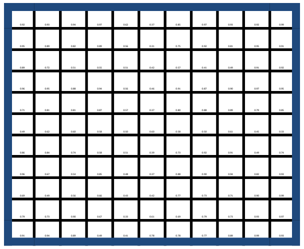
Heures de disponibilité (JF):

- Mercredi 15h30-16h30
- Jeudi 11h30-12h30

Date de remise du TP1: 2 février (dimanche prochain!) @ 23h55

La semaine dernière…

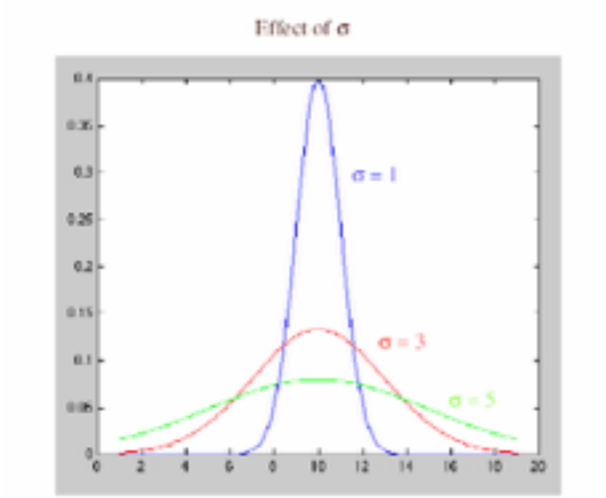
- Une image est une matrice de nombres

 = 

- Filtrage linéaire
  - Peut adoucir, accentuer, identifier les arrêtes horizontales/verticales

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Considérations
  - Que faire en bordure de l’image?
  - Dimensions du filtre (en fonction de la variance)



Questions de révision

1. Un filtre 3x3 qui retourne un nombre positif si la valeur moyenne des 4-voisins est plus petite que celle du pixel central, et négatif sinon.
2. Un filtre qui calcule le gradient dans la direction horizontale:

   ```
   gradx(y,x) = im(y,x+1)-im(y,x) pour tout x, y
   ```

Questions de révision

Remplir les trous:

Filtrage

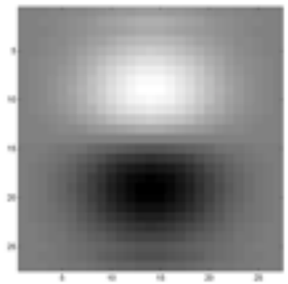
a) _ = D * B

b) A = _ * _

c) F = D * _

d) _ = D * D

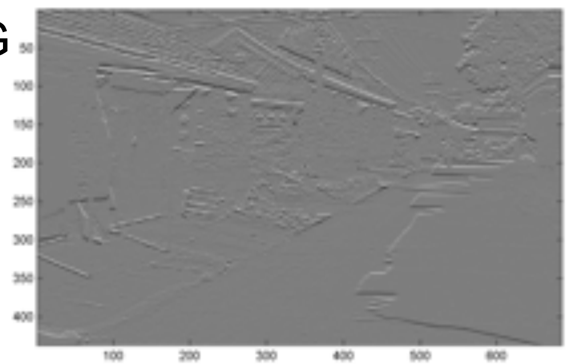
A



B

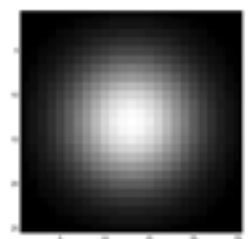
E

G



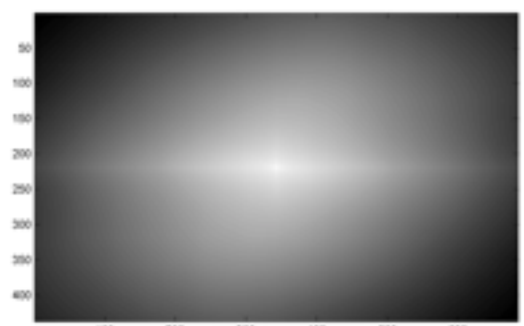
F

C



H

I

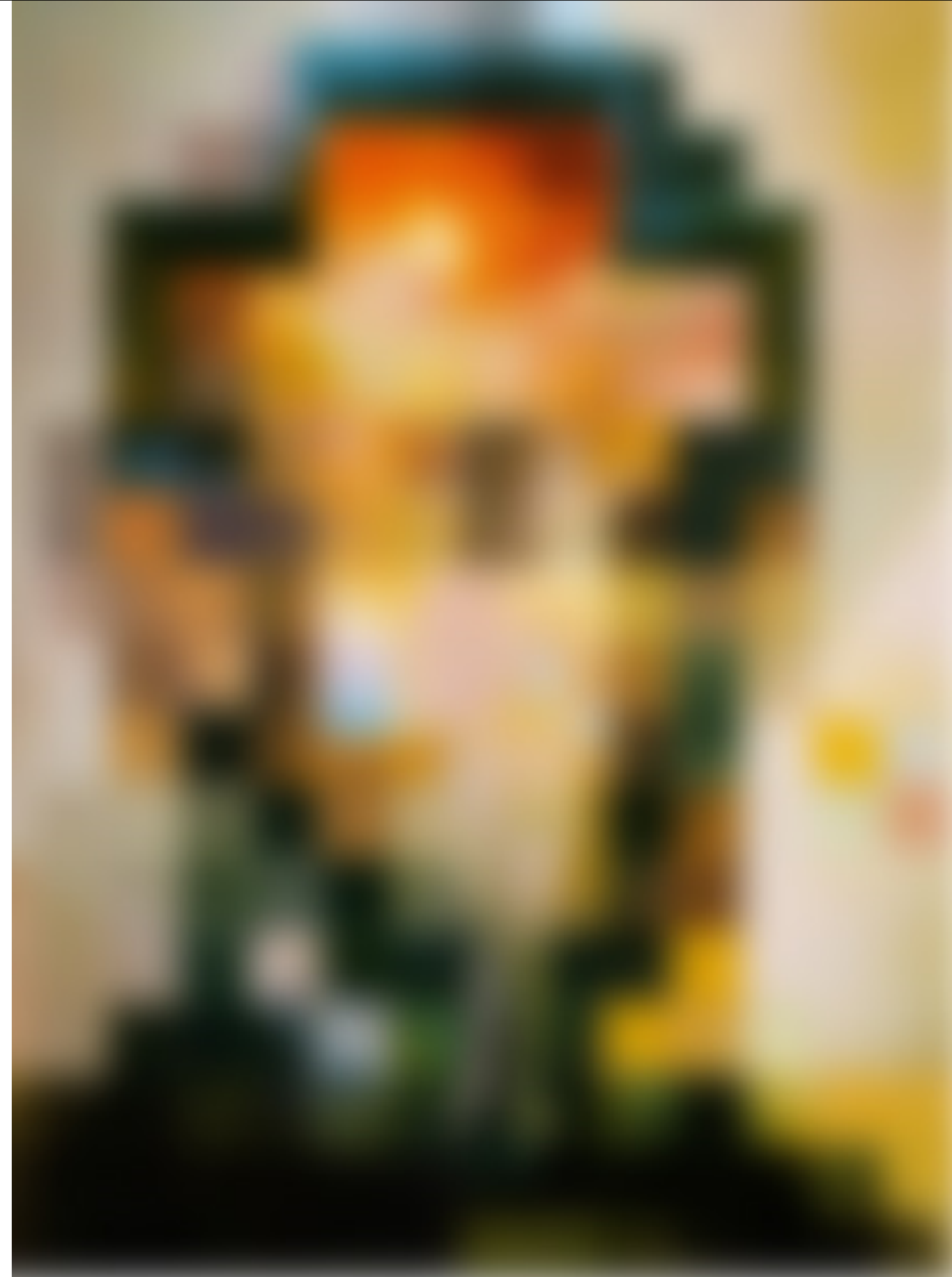


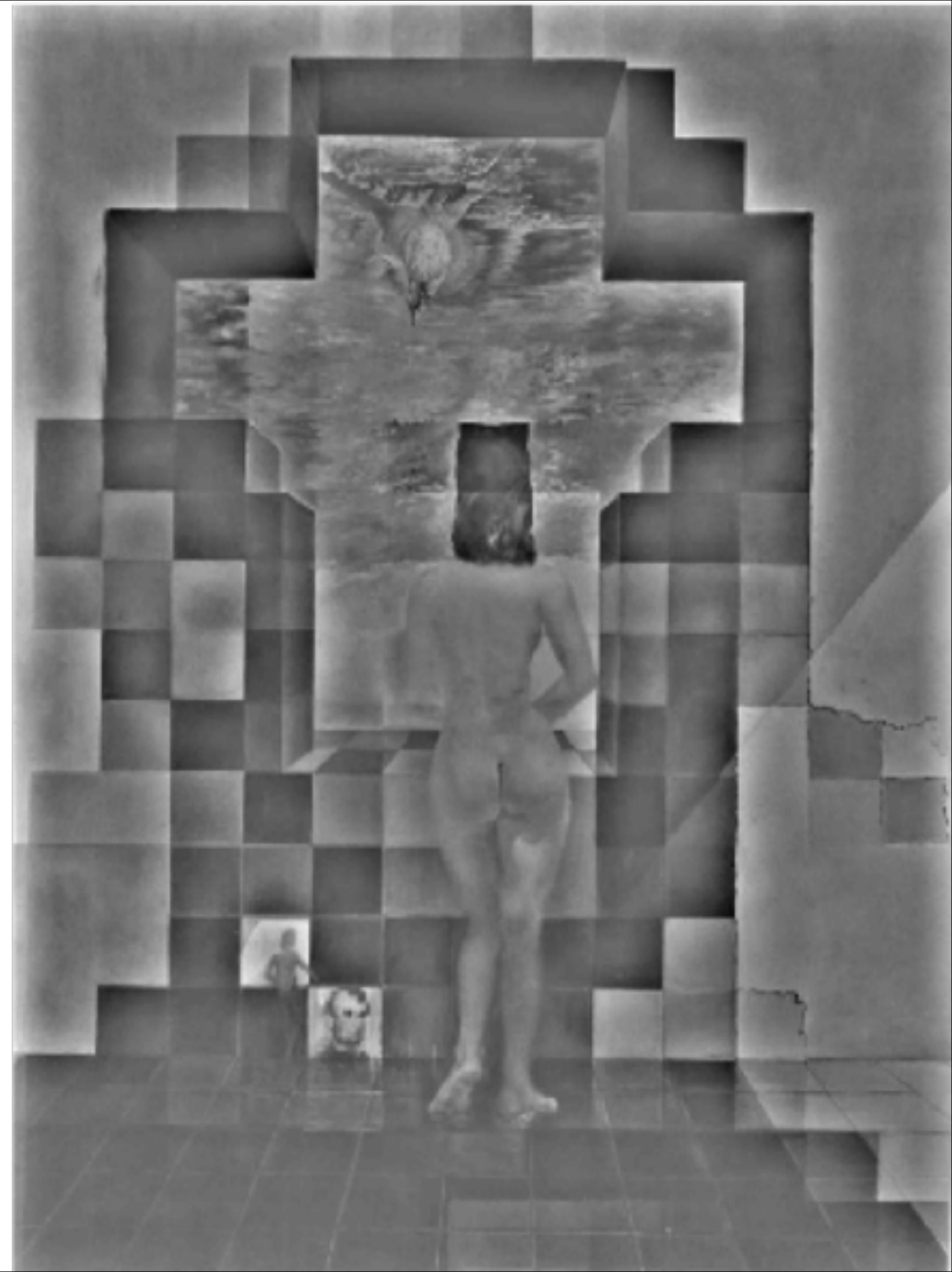
D

Aujourd’hui

- La transformée de Fourier et le domaine spectral
  - Autre dimension du filtrage: domaine spectral
  - Échantillonnage

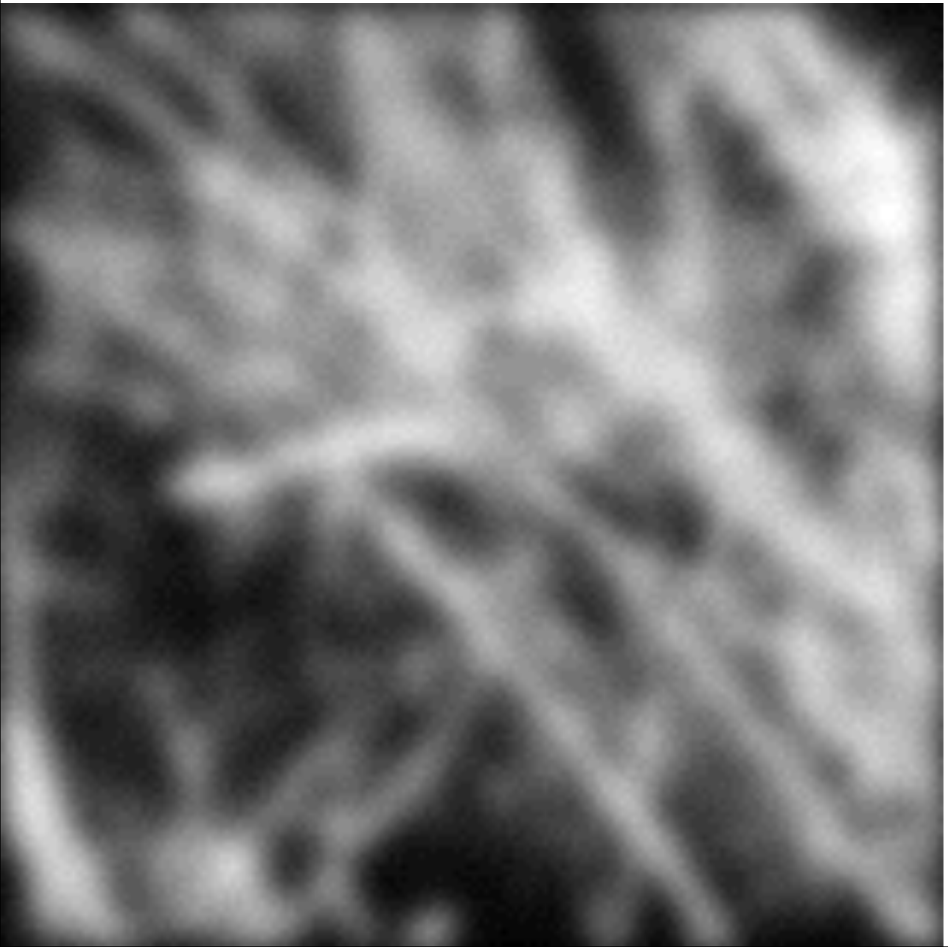
Salvador Dali
“Gala contemplant la mer Méditerranée qui à vingt mètres devient le portrait d'Abraham Lincoln ”, 1976



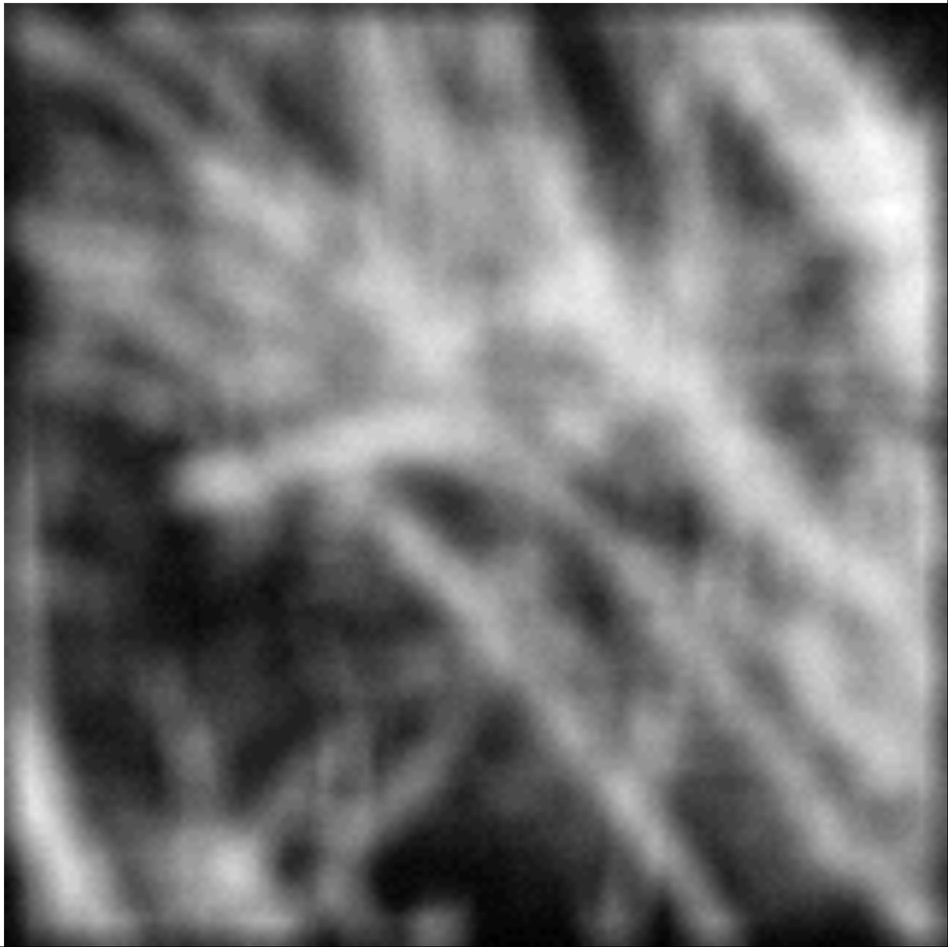


Pourquoi le filtre gaussien nous donne une image lisse, mais pas le filtre boîte?

Gaussien 



Boîte 



Pourquoi une image à plus faible résolution est toujours compréhensible? Quelle est l'information perdue?

Image: http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

a eu une idée révolutionnaire (1807):

***Toute** fonction peut être écrite comme une somme pondérée de sinus et cosinus de différentes fréquences*

- Vous n'y croyez pas?
  - Lagrange, Laplace, Poisson et autres non plus!
  - Pas traduit en anglais jusqu'à 1878!

Slide: Efros

Une somme de sinus

Notre bloc de base:

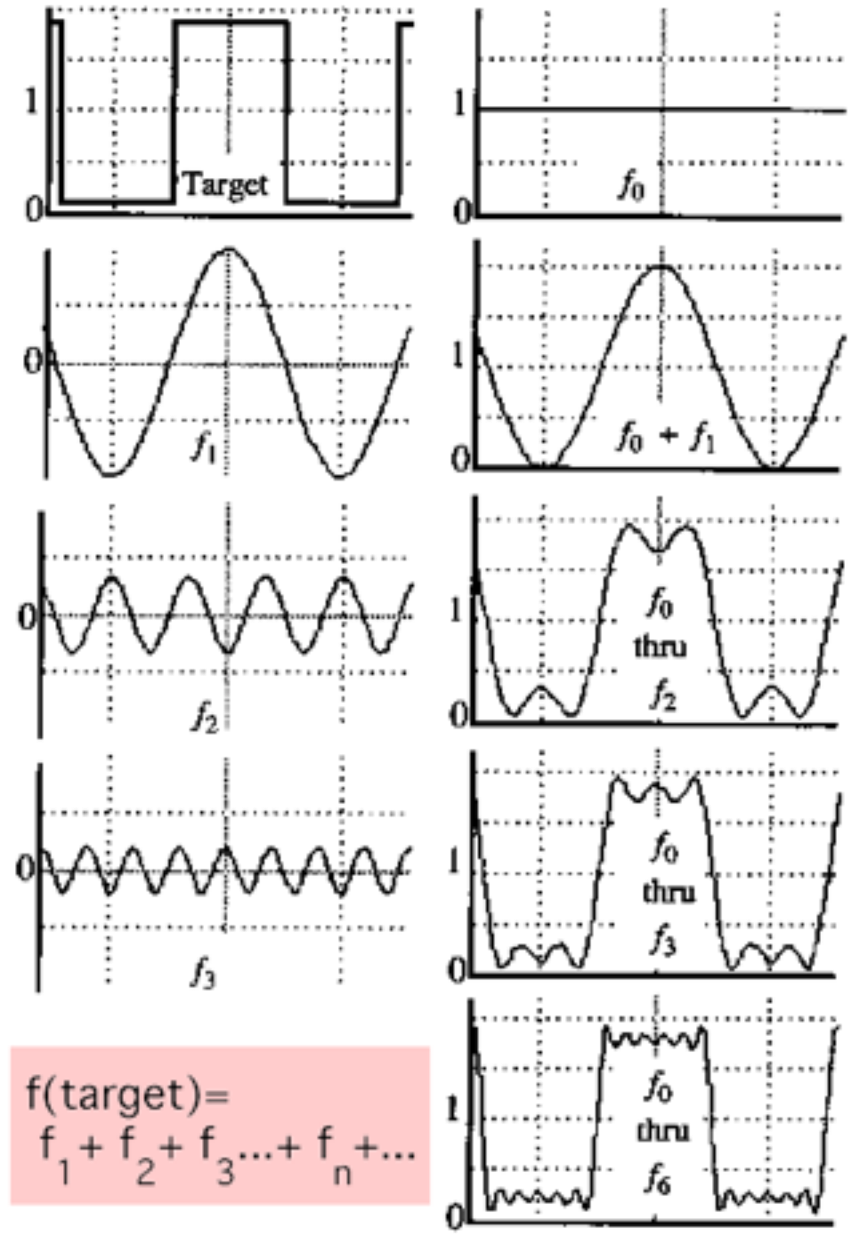
$$A \sin(\omega x + \phi)$$

Rajouter suffisamment de "bloc" pour obtenir n'importe quel signal *f(x)*!

Combien de degrés de liberté?

Qu'est-ce que chacun contrôle?

Lequel capture les variations rapides et lentes du signal?



La transformée de Fourier

Nous voulons comprendre la fréquence ω de notre signal. Exprimons alors le signal avec ω au lieu de *x*:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{Transformée de Fourier}} \longrightarrow F(\omega)$$

- capture la magnitude et la phase à chaque fréquence
  - Magnitude: “combien” de signal à chaque fréquence
  - Phase: information spatiale (indirectement)
  - Comment faire pour représenter ces deux informations? On utilise les nombres complexes

Amplitude: $A = \pm\sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}$

Phase: $\phi = \tan^{-1}\dfrac{I(\omega)}{R(\omega)}$

Formule d’Euler: $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$

Calculer la transformée de Fourier

$$H(\omega) = \mathcal{F}\left\{h(x)\right\} = Ae^{j\phi}$$

Continue

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\omega x} dx$$

Discrète

$$H(k) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} h(x) e^{-j\frac{2\pi k x}{N}}$$

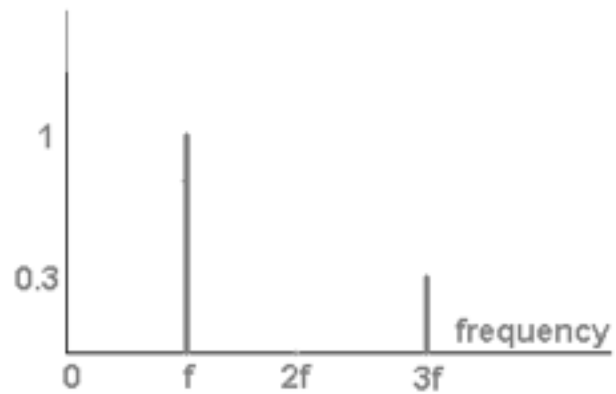
k=-N/2..N/2

(pour s'en souvenir)

[Fast Fourier Transform](FFT): NlogN

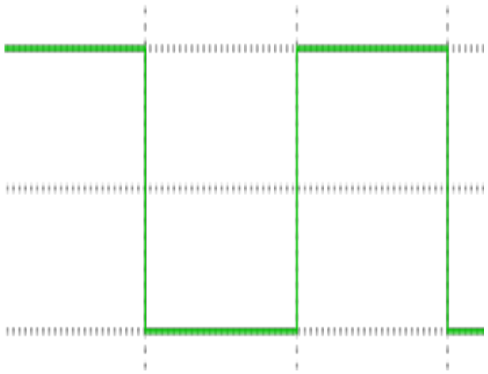
Spectre en fréquences

- exemple : $g(t) = \sin(2\pi f\ t) + (1/3)\sin(2\pi(3f)\ t)$

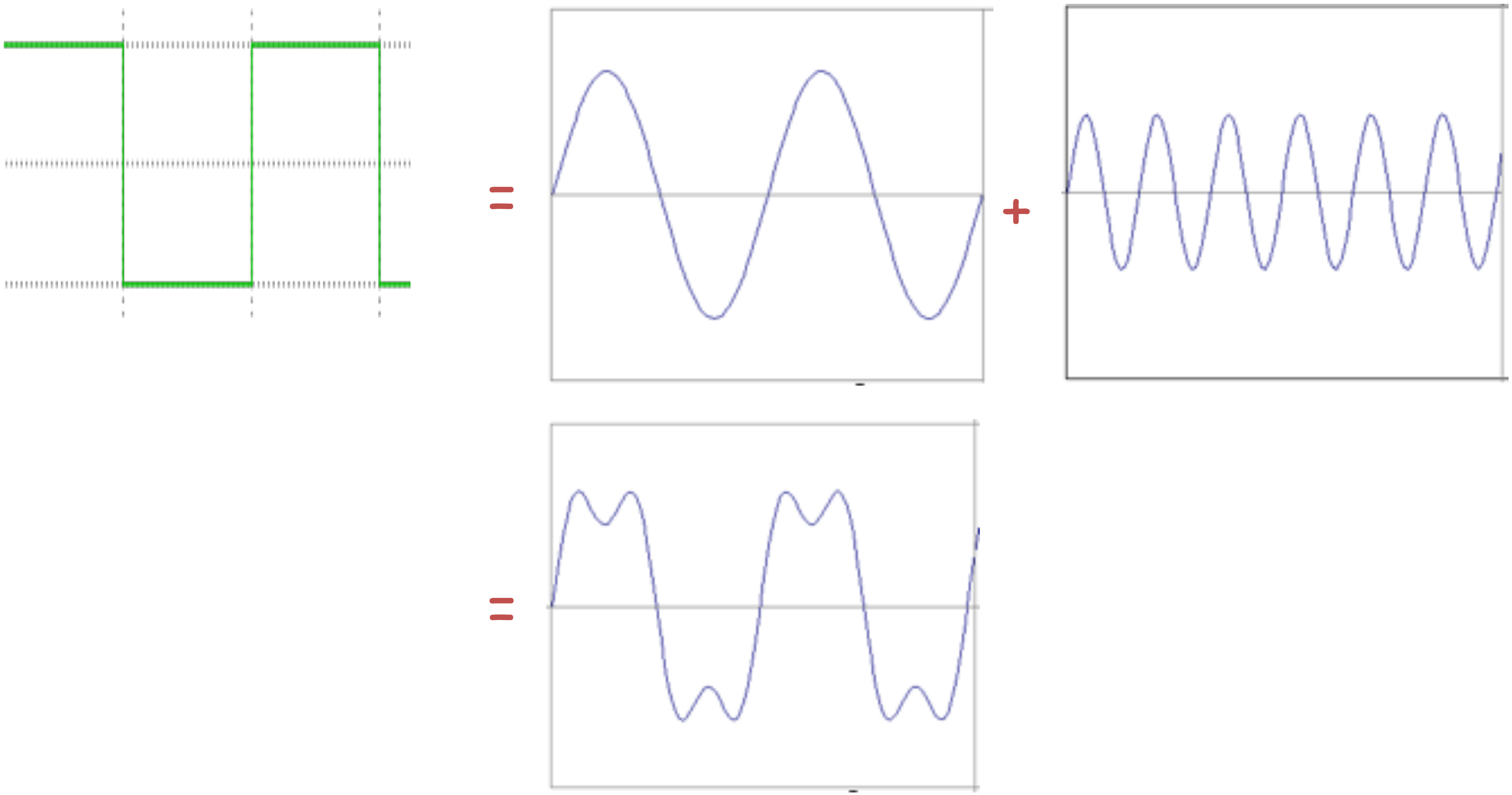


Efros

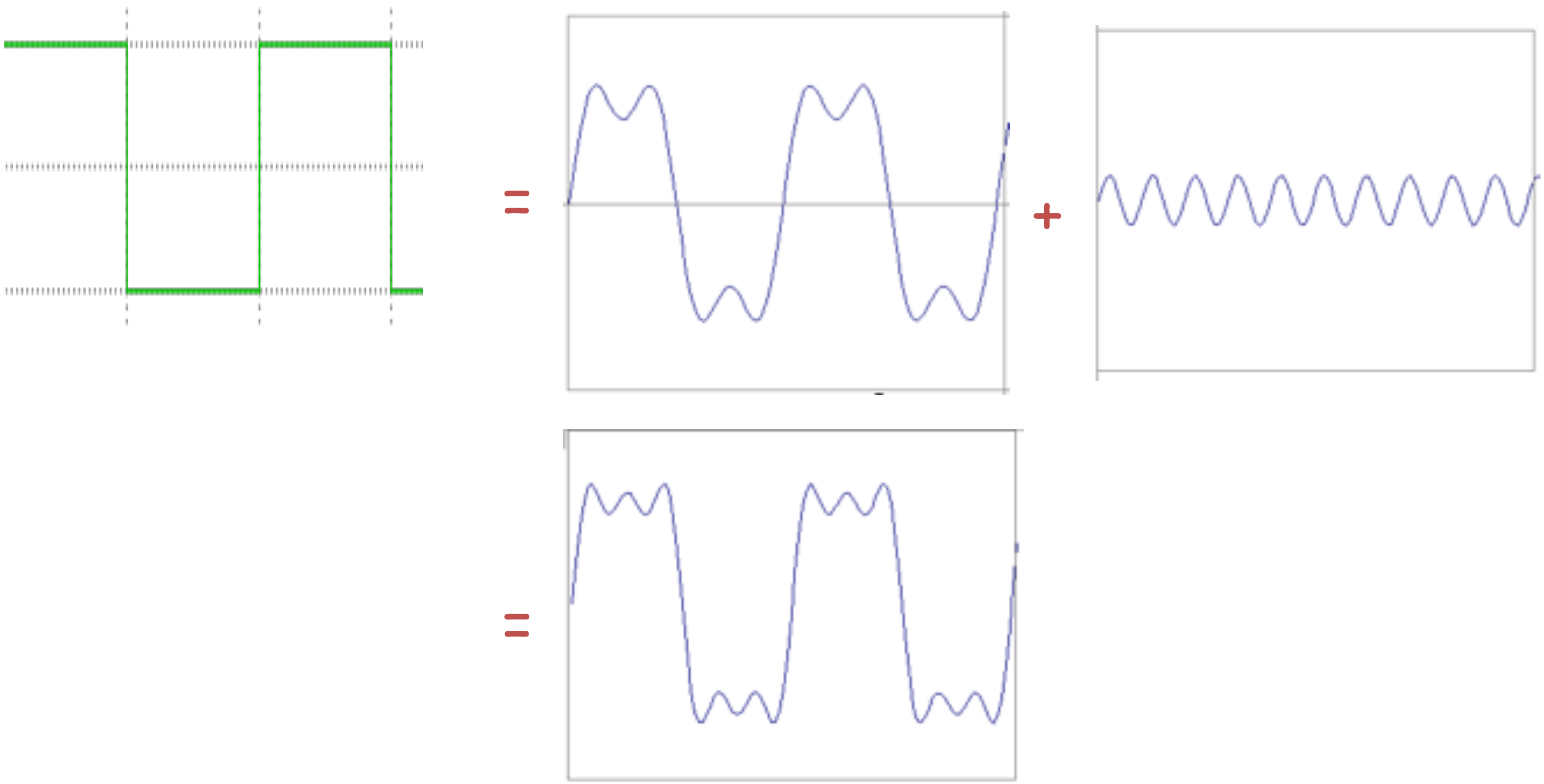
Spectre en fréquences



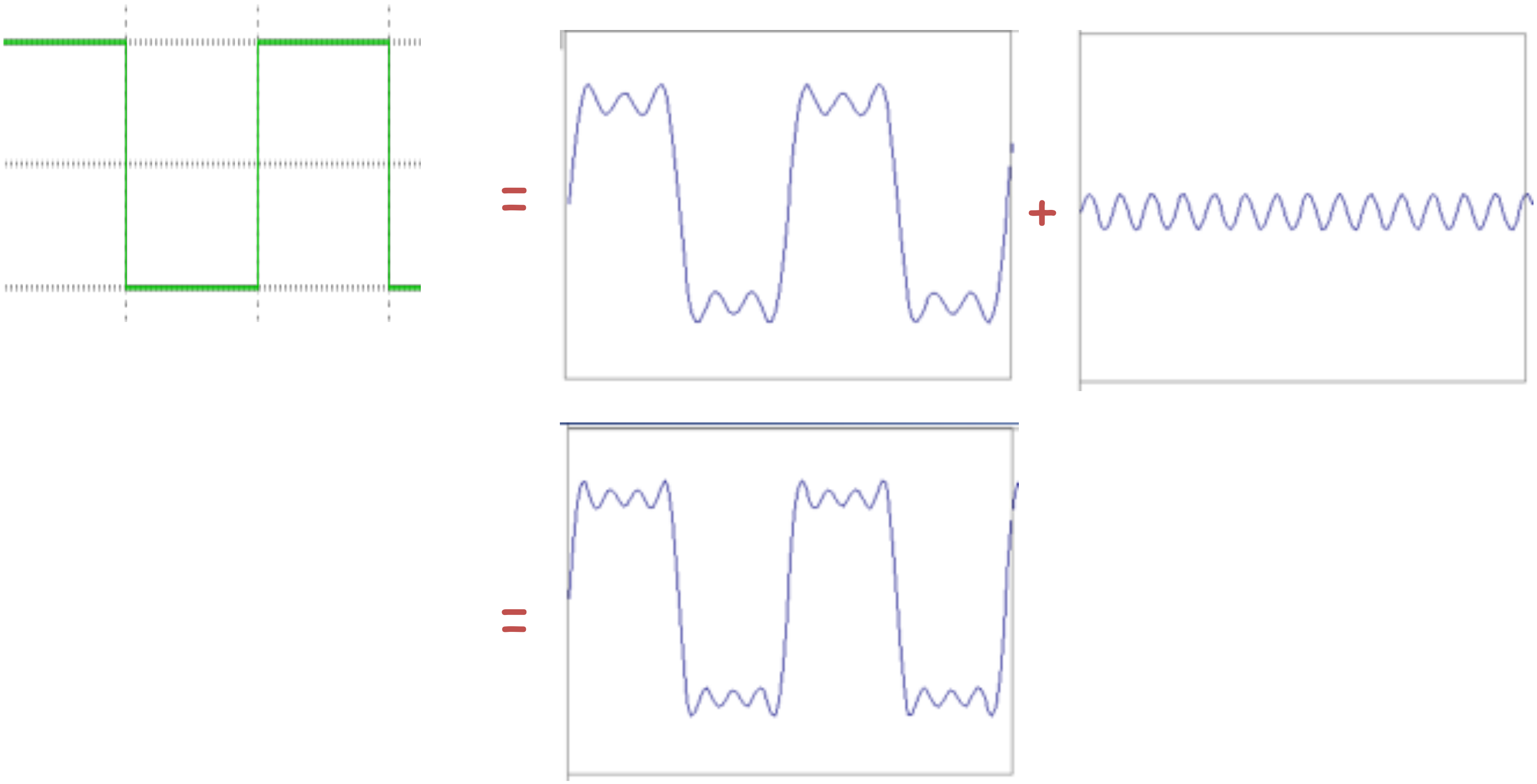
Spectre en fréquences



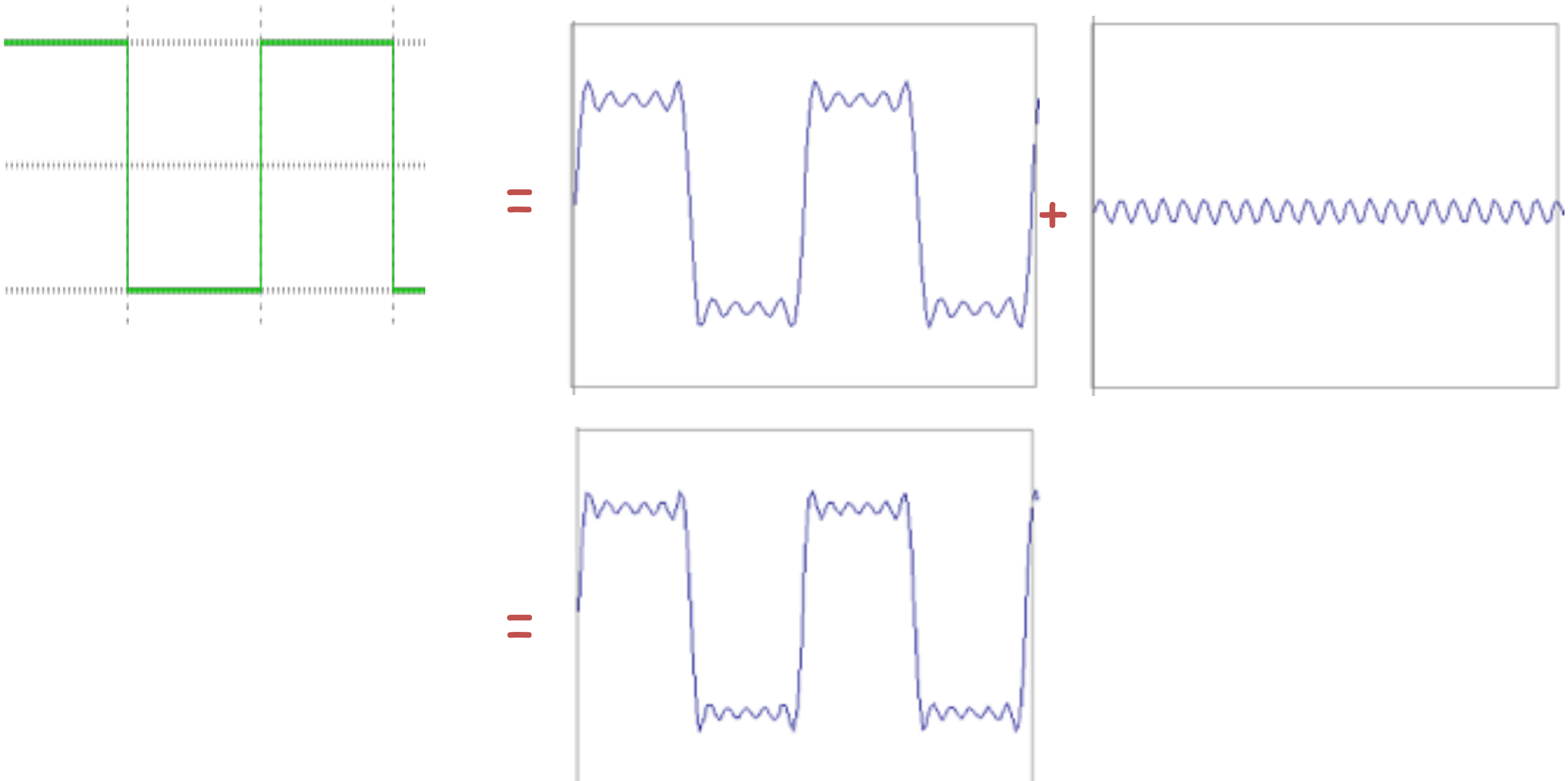
Spectre en fréquences



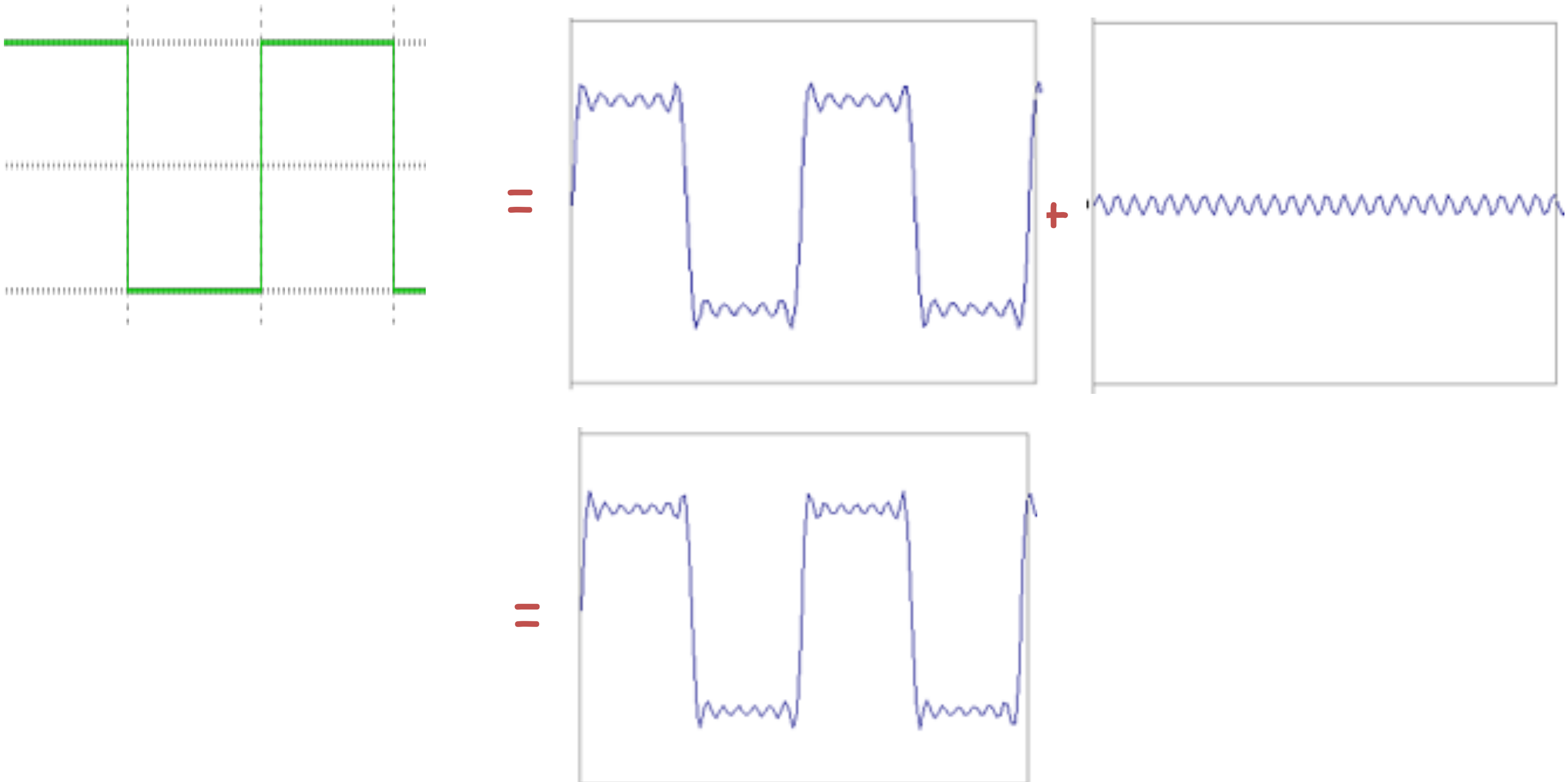
Spectre en fréquences



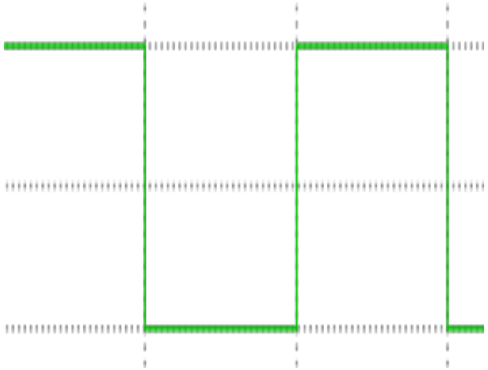
Spectre en fréquences



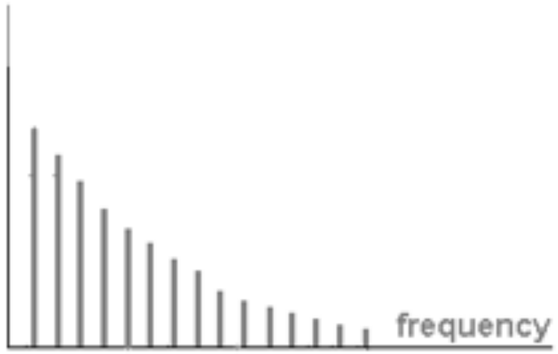
Spectre en fréquences



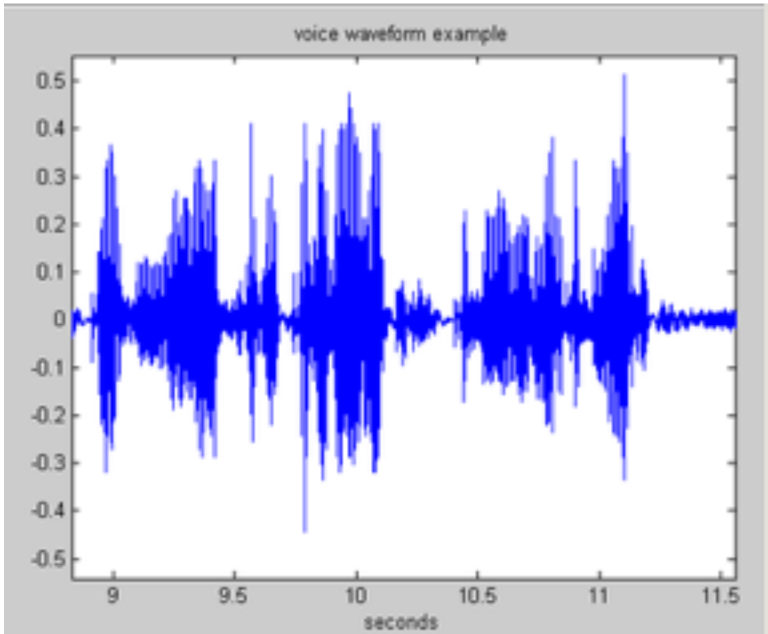
Spectre en fréquences

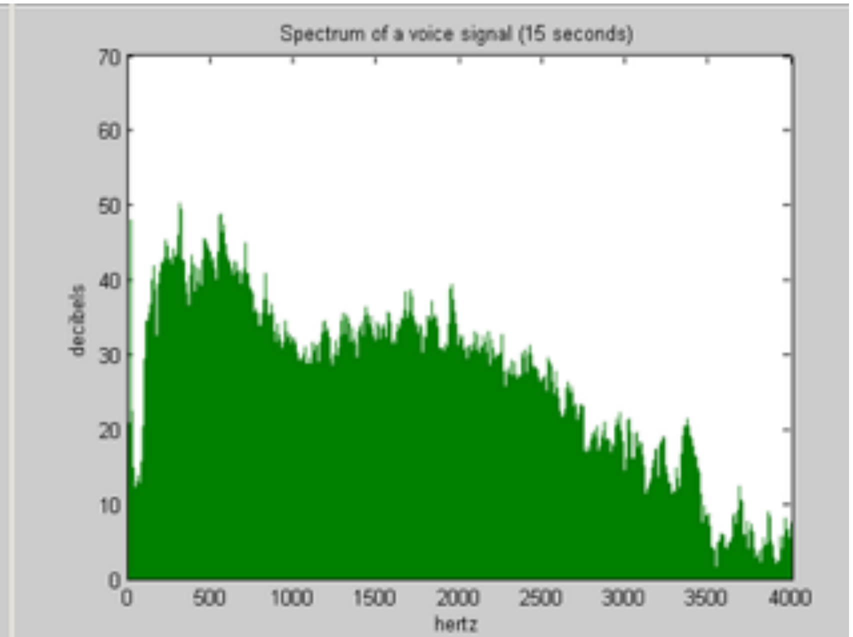


$$= \boxed{A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2\pi\, kt)}$$

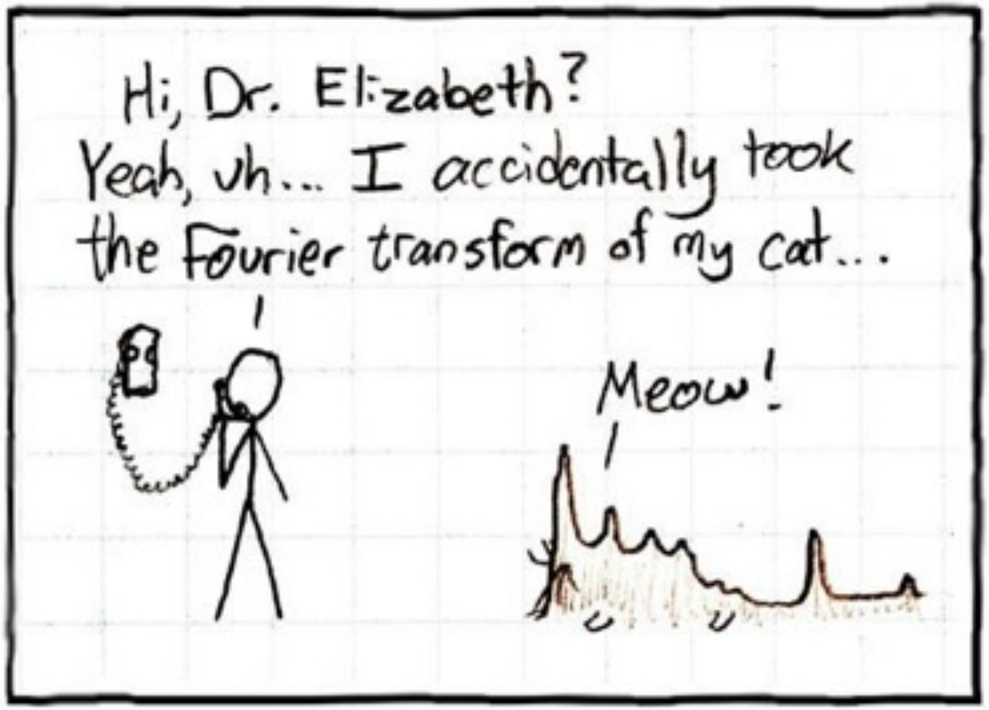


Exemple: musique





Autres signaux

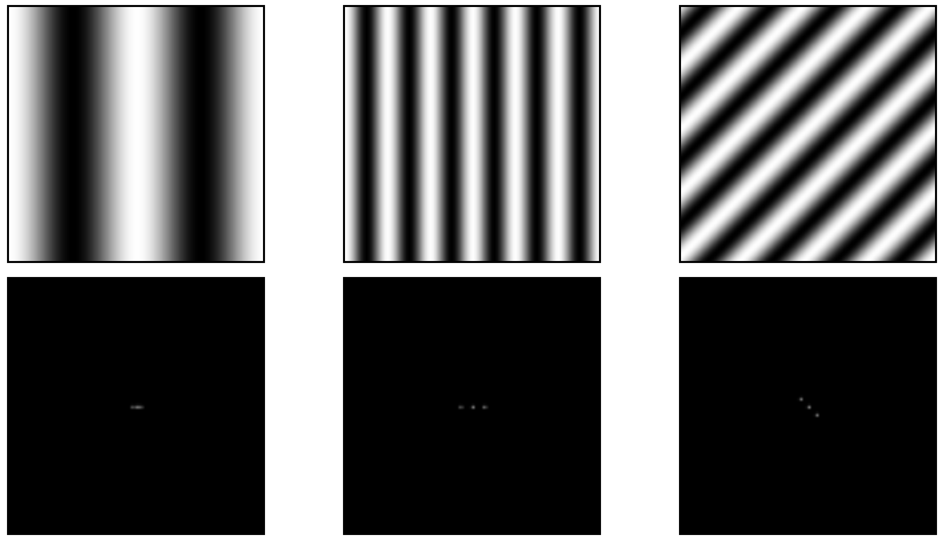


xkcd.com

Transformée de Fourier dans les images

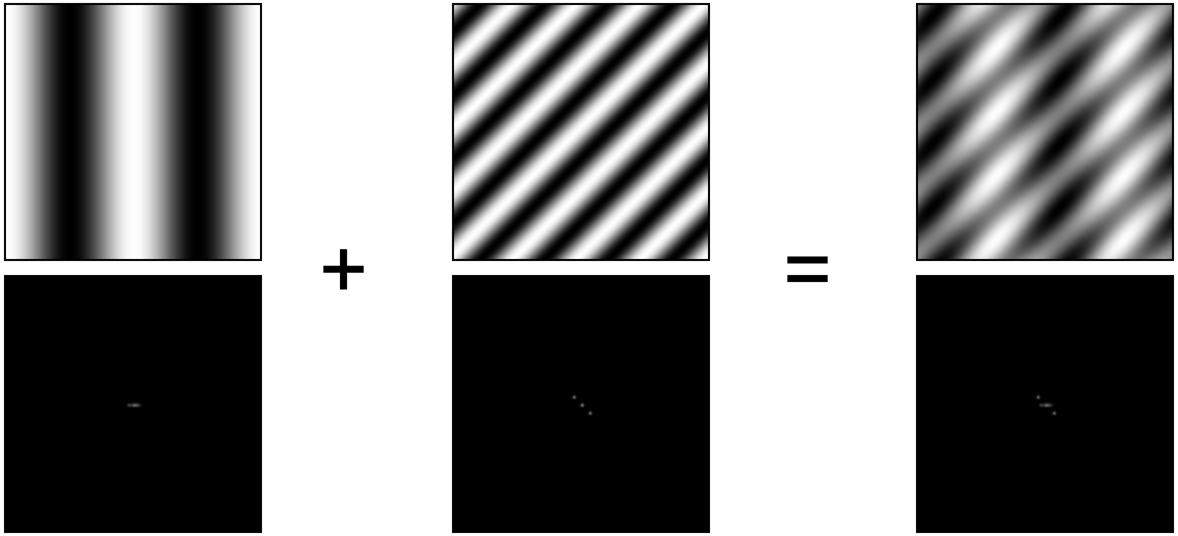
Image

Transformée de Fourier

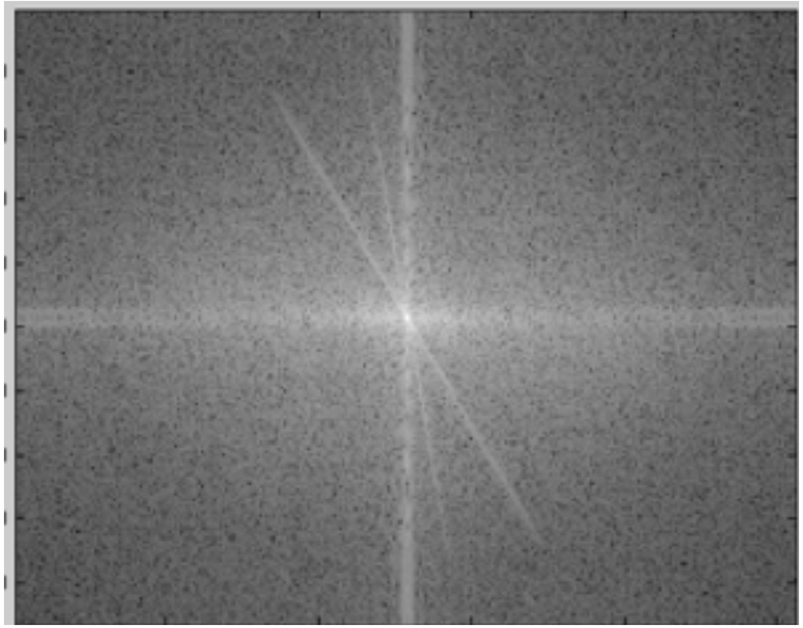


http://sharp.bu.edu/~slehar/fourier/fourier.html#filtering

On peut composer les images

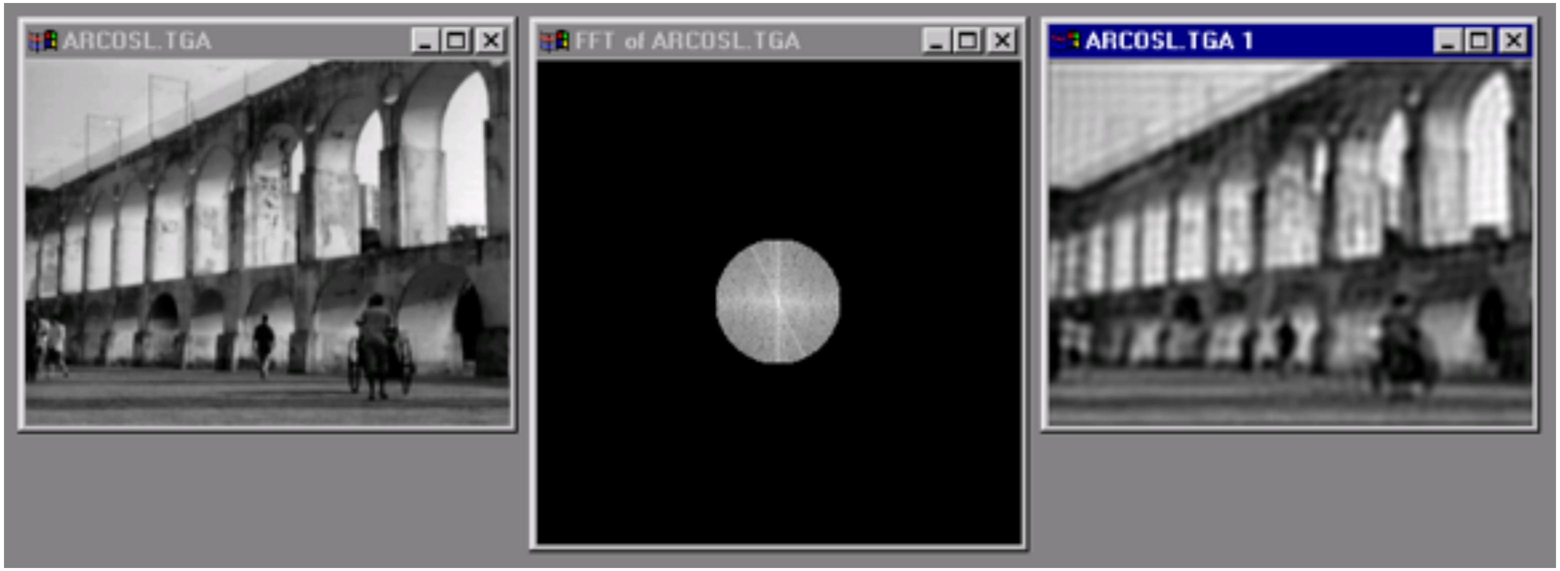


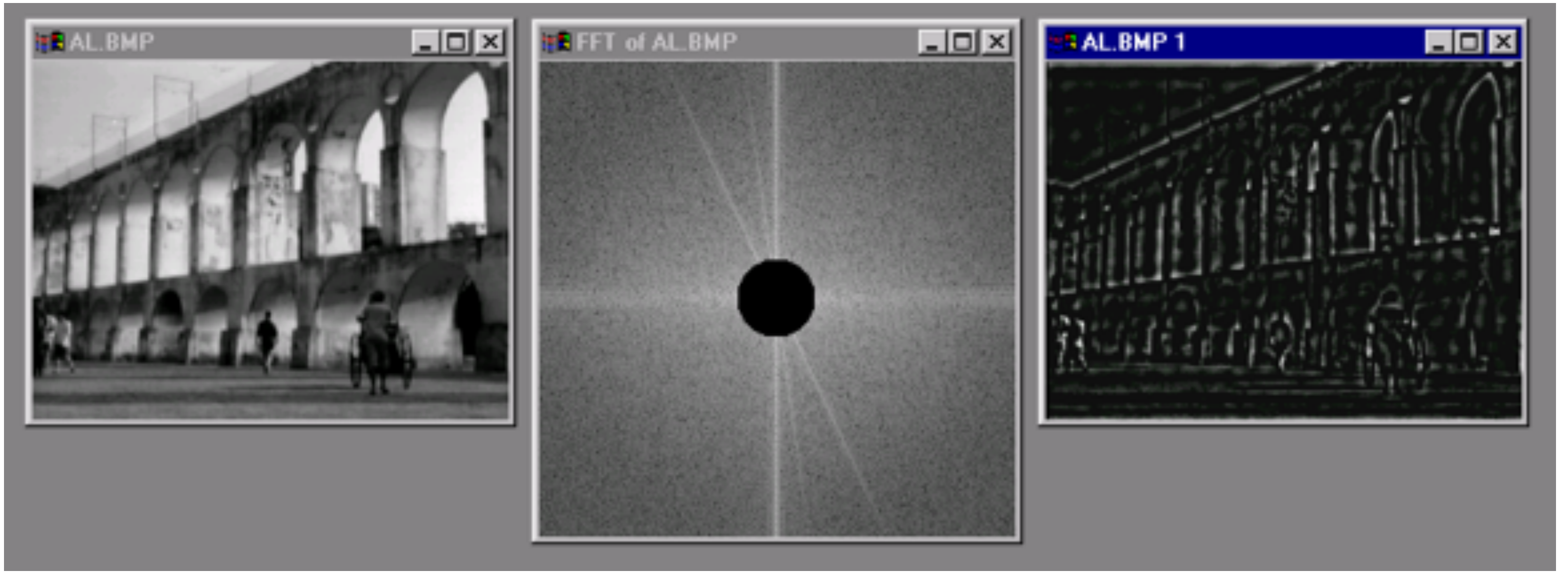
http://sharp.bu.edu/~slehar/fourier/fourier.html#filtering
More: http://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html



Modifications au spectre

Filtrage passe-bas et passe-haut





Le théorème de la convolution

- La transformée de Fourier d'une convolution de deux fonctions est le produit de leur transformée de Fourier

$$\mathrm{F}[g * h] = \mathrm{F}[g]\,\mathrm{F}[h]$$

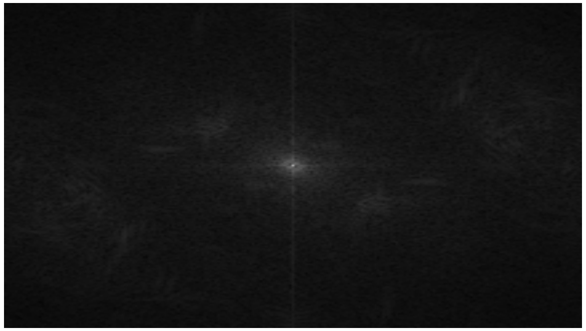
- La transformée de Fourier inverse d'un produit de deux transformées de Fourier est la convolution des deux transformées de Fourier inverse

$$\mathrm{F}^{-1}[gh] = \mathrm{F}^{-1}[g] * \mathrm{F}^{-1}[h]$$

- La **convolution** dans le domaine spatial est équivalent à la **multiplication** dans le domaine spectral

Théorème de la convolution

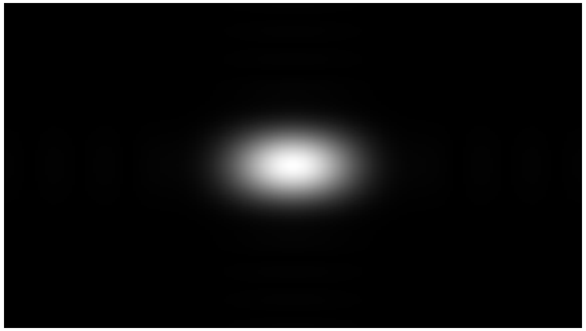
$f(x,y)$



$|F(s_x,s_y)|$

$*$ $\times$

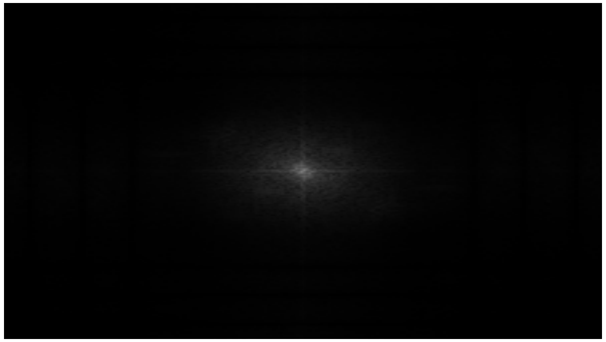
$h(x,y)$



$|H(s_x,s_y)|$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

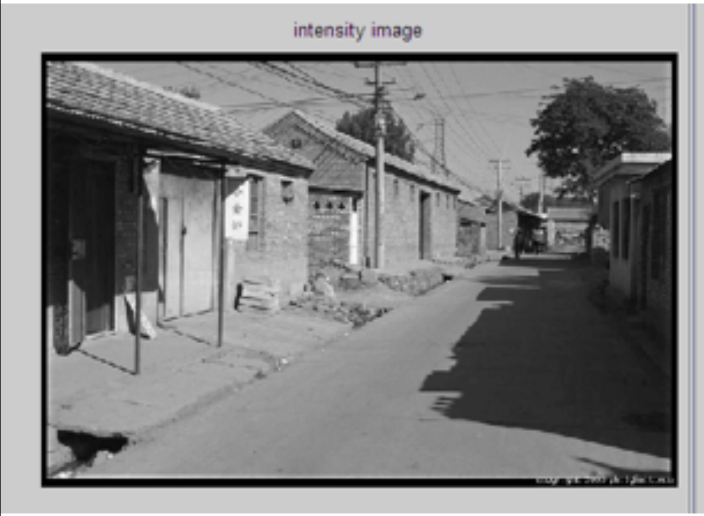
$g(x,y)$



$|G(s_x,s_y)|$

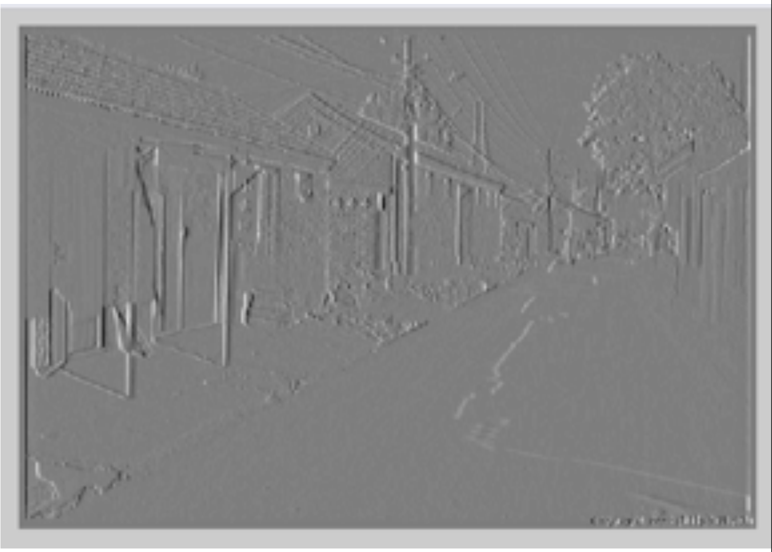
Filtrage spatial

1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1

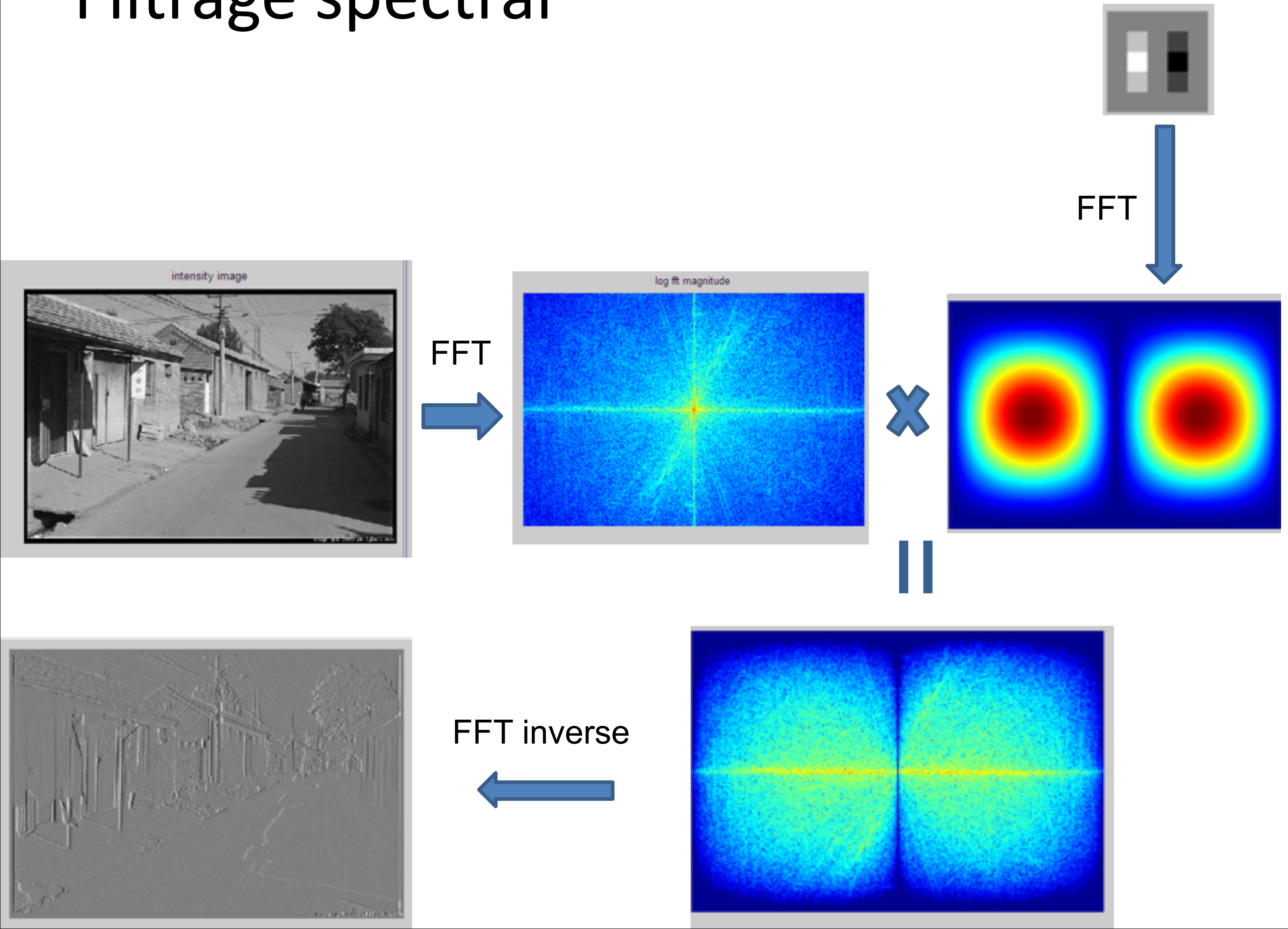


*

=



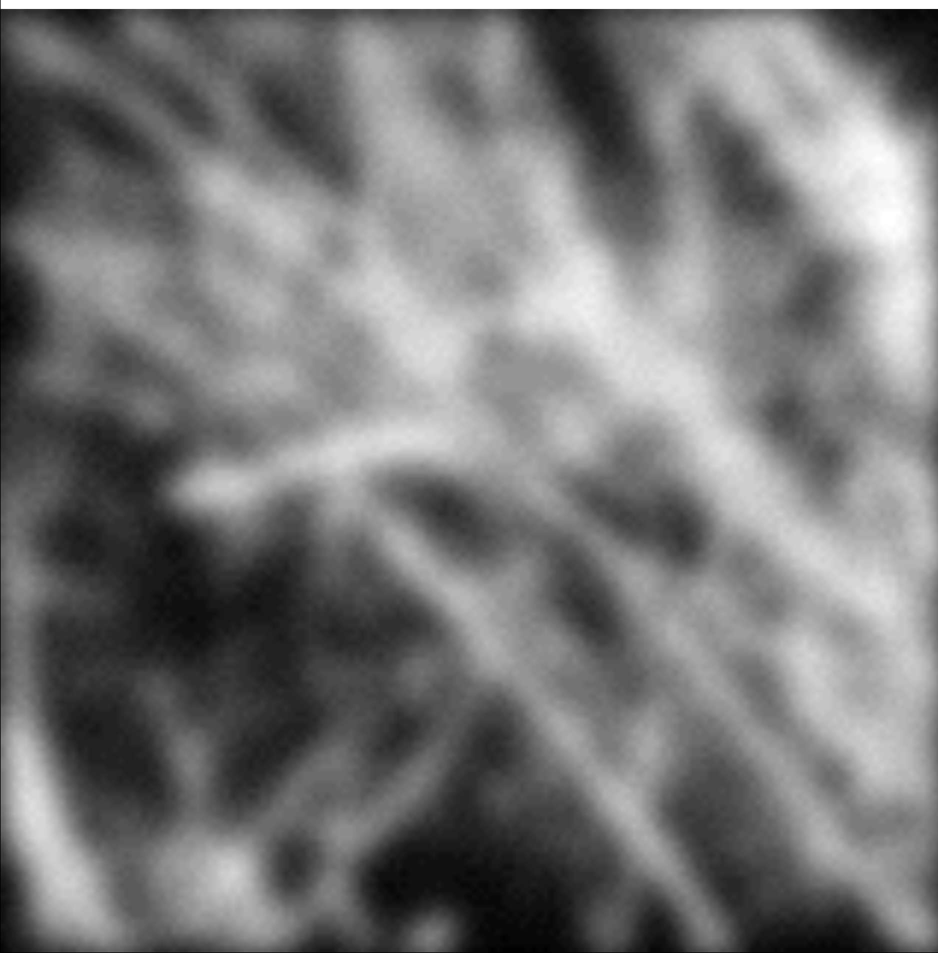
Filtrage spectral



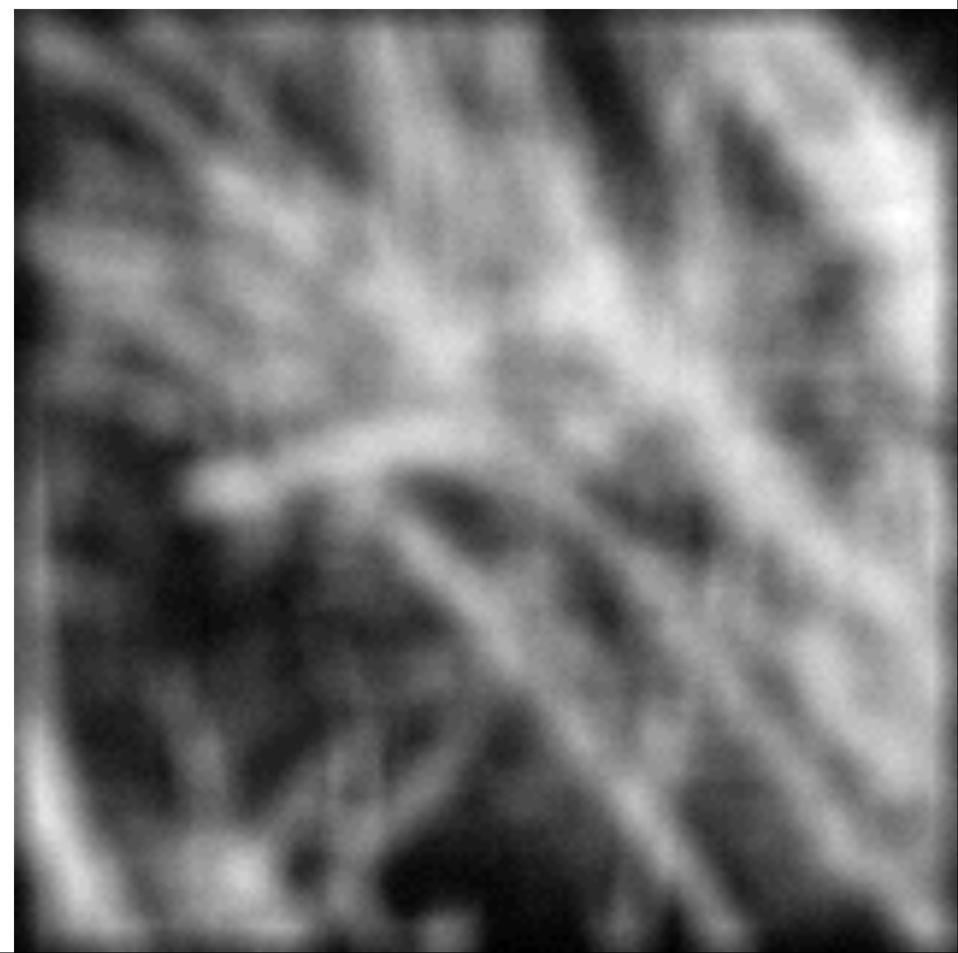
DÉMONSTRATION

Pourquoi le filtre gaussien nous donne une image lisse, mais pas le filtre boîte?

Gaussien 



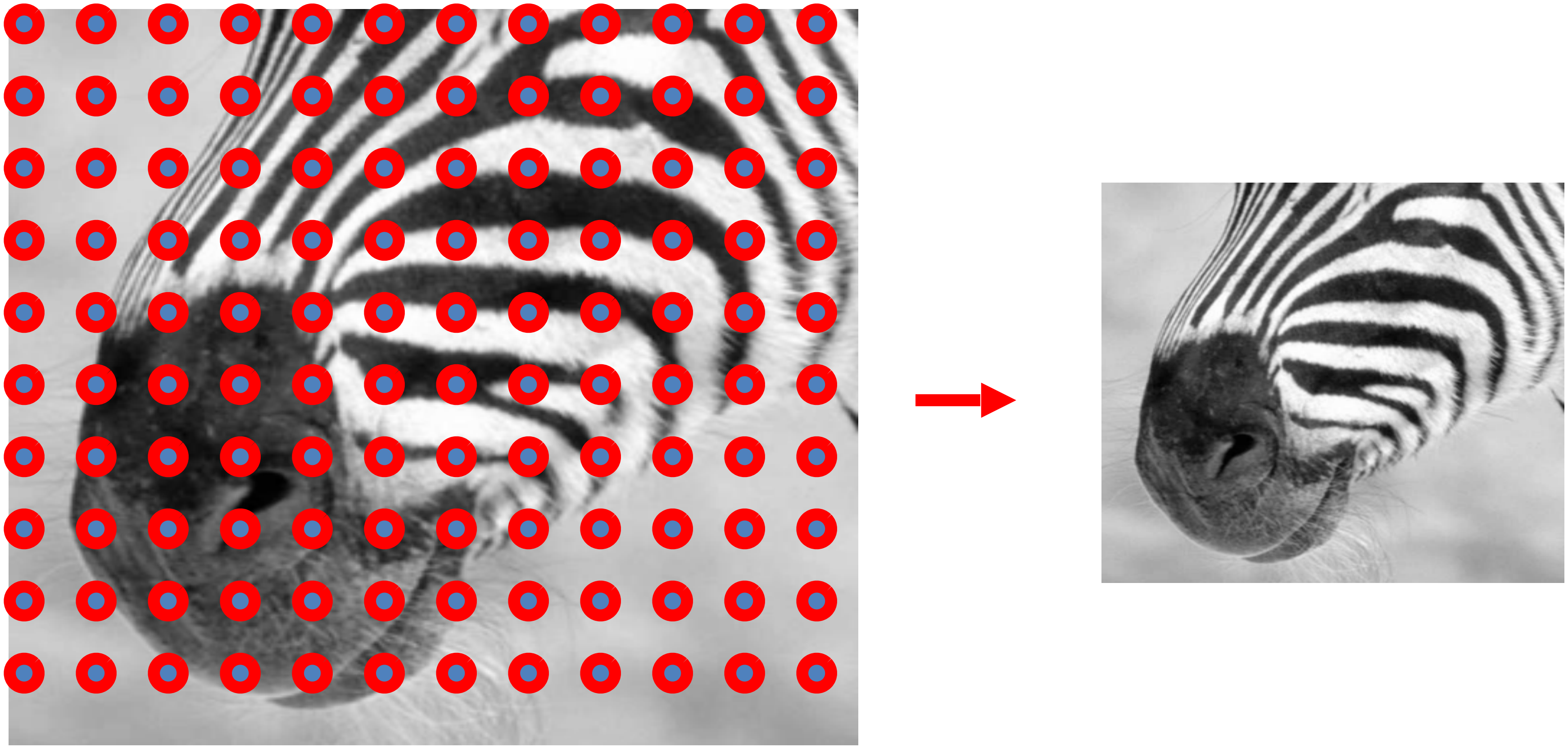
Boîte 



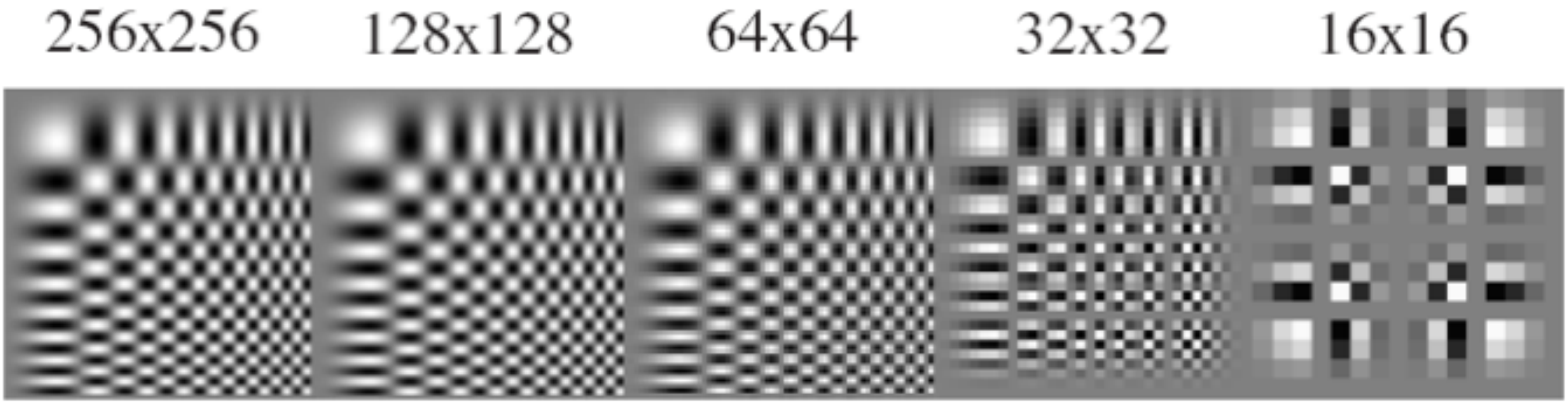
Pourquoi une image à plus faible résolution est toujours compréhensible? Quelle est l'information perdue?

Image: http://www.flickr.com/photos/igorms/136916757/

Échantillonnage par un facteur 2

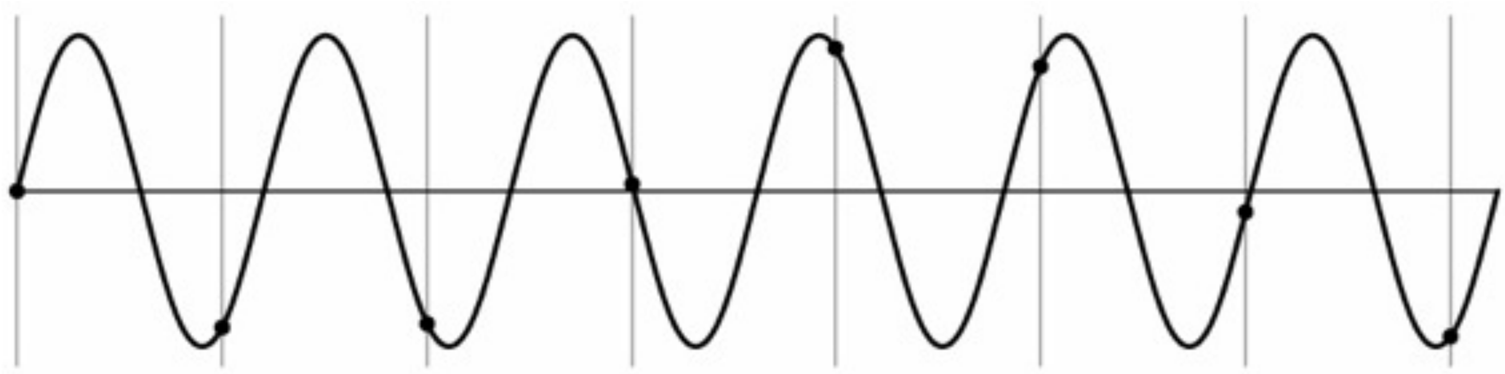


Bonne idée?



Recouvrement spectral

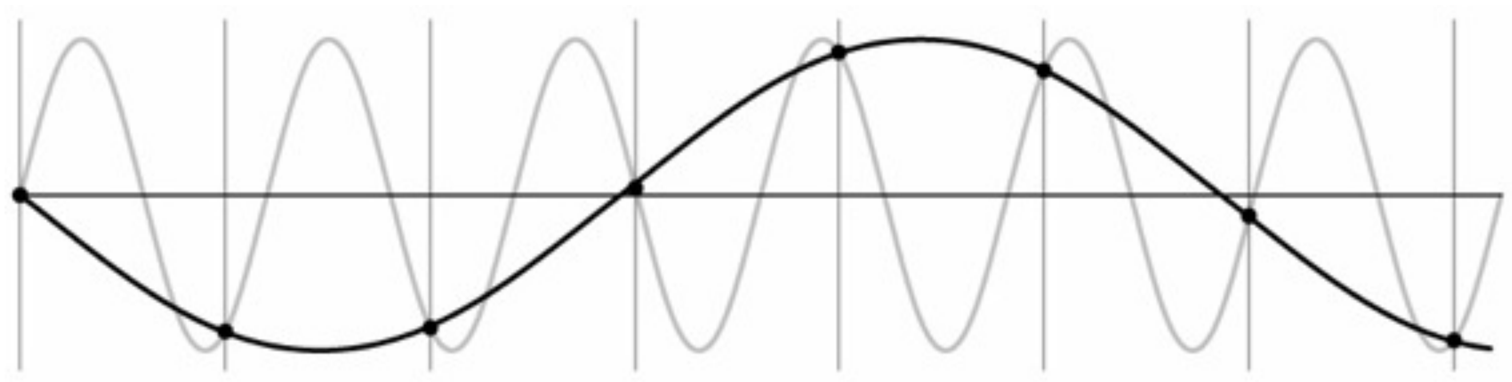
- 1D (sinus):



Source: S. Marschner

Recouvrement spectral

- 1D (sinus)



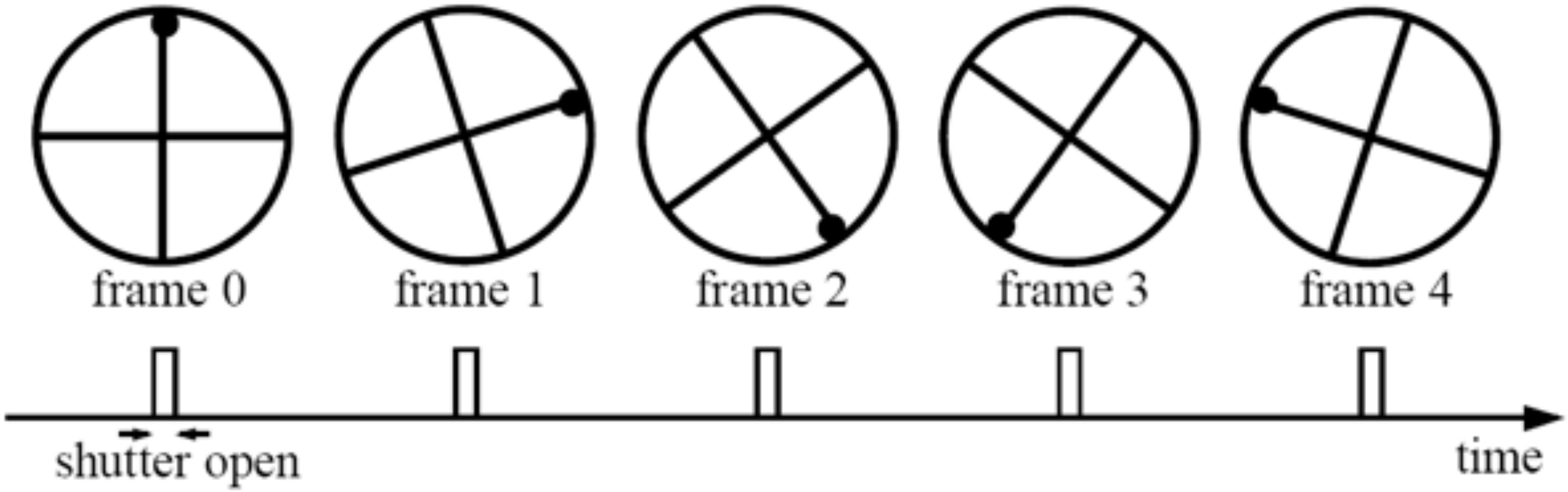
Source: S. Marschner

Recouvrement spectral

- L'échantillonnage peut être dangereux!
- Erreurs typiques:
  - "Roues tournant à l'envers"
  - "Jeu d'échec disparaissant à distance"
  - "Texture des vêtements à la télé"

Source: D. Forsyth

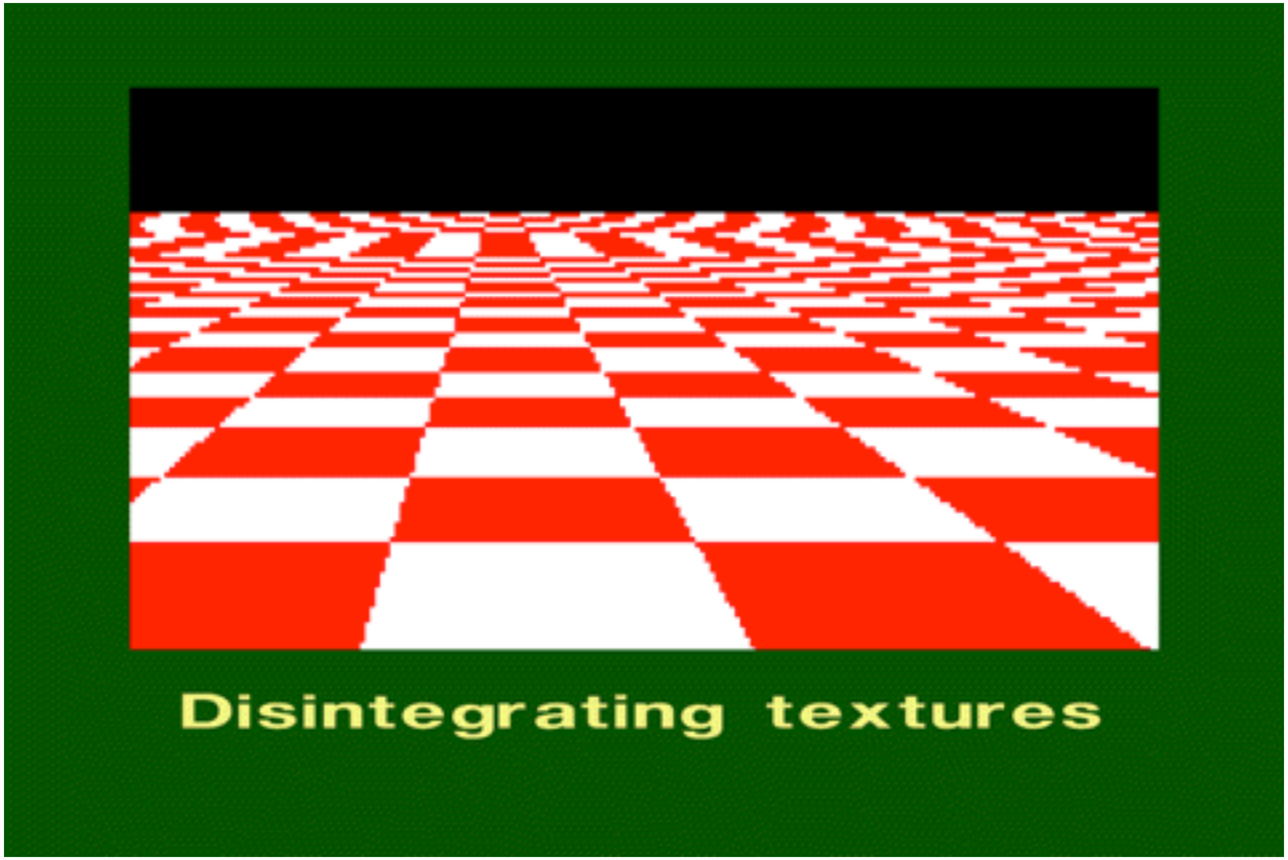
Recouvrement spectral dans les vidéos



http://www.youtube.com/watch?v=Y1yHMy0-4TM

Slide by Steve Seitz

Recouvrement spectral en infographie

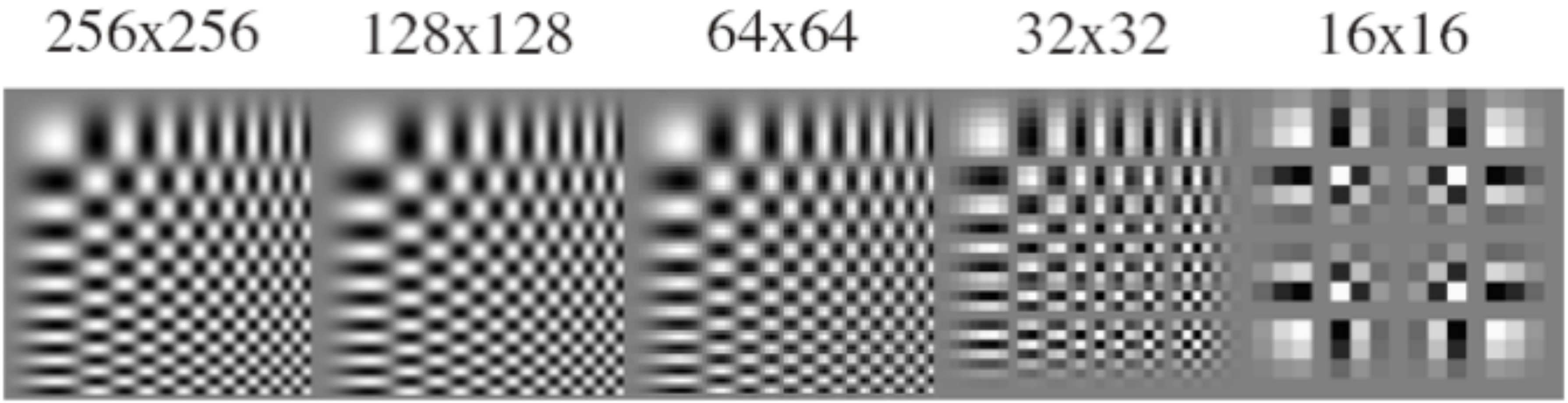


Source: A. Efros

À la télé….

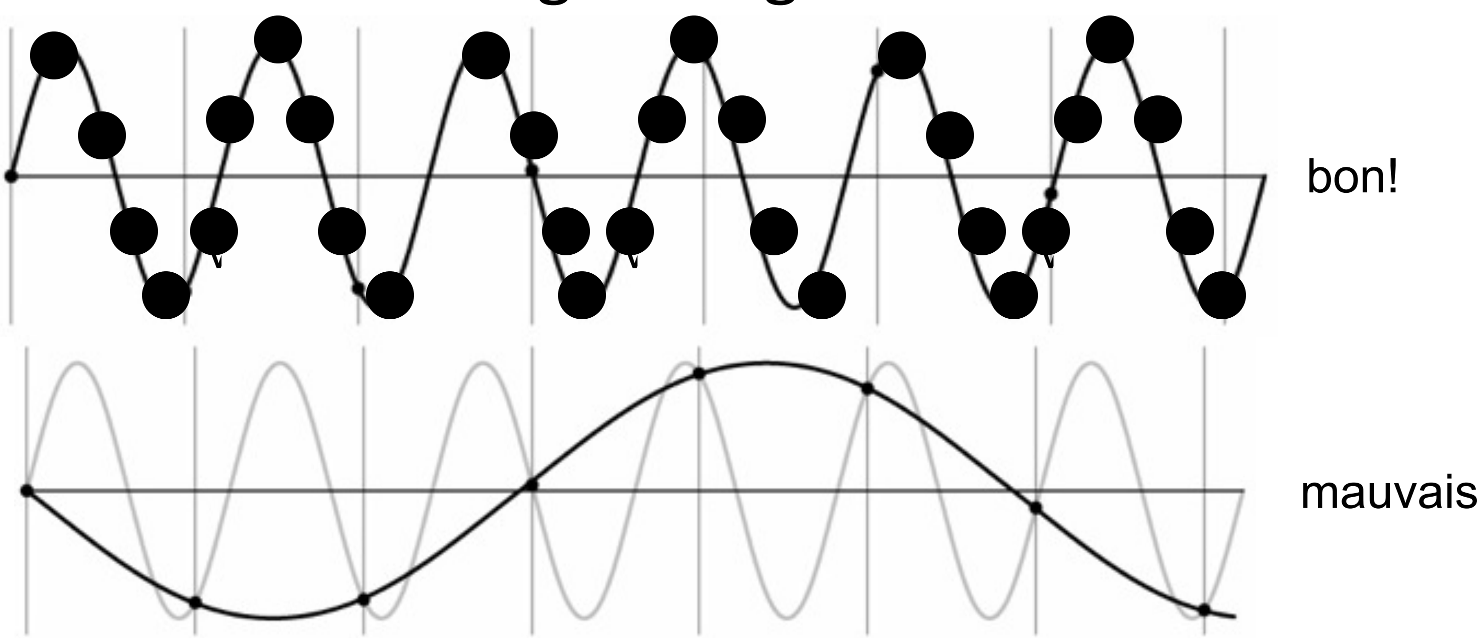
http://www.youtube.com/watch?v=jXEgnRWRJfg

Recouvrement spectral



Théorème d'échantillonnage Nyquist-Shannon

- La fréquence d'échantillonnage d'un signal devrait être $\geq 2 \times f_{max}$
  - f_{max} = fréquence maximale du signal
- Cette condition respectée garantit la reconstruction du signal original



Anti-recouvrement (anti-aliasing)

Solutions:

- Augmenter la fréquence d’échantillonnage!

- Réduire les fréquences qui sont plus grandes que la moitié de la fréquence d’échantillonnage
  - Perte d’information
  - Mieux que le recouvrement spectral!

Algorithme pour re-dimensionner d’un facteur 2

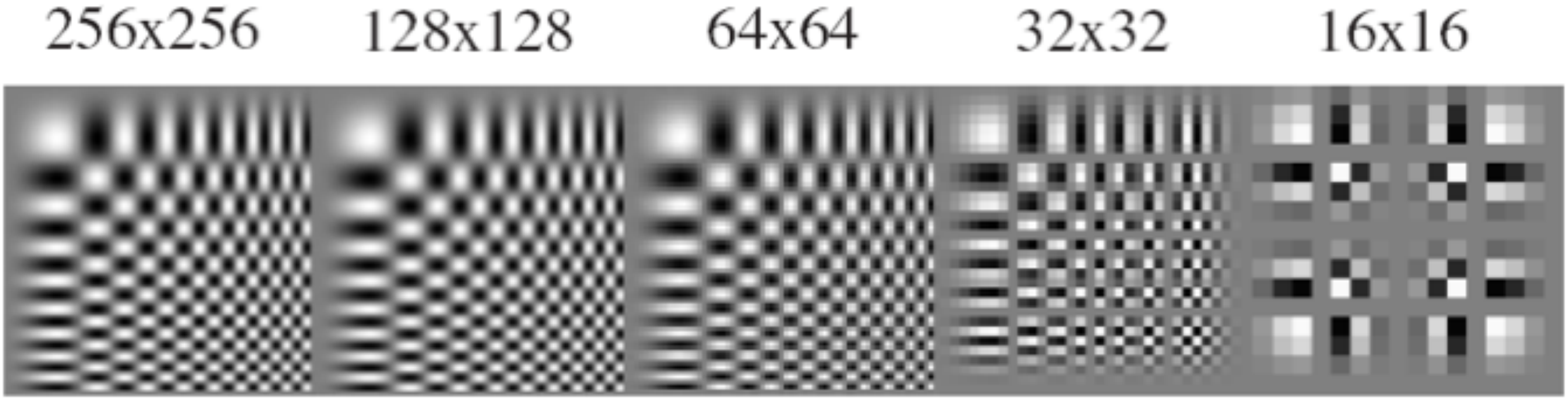
1. Étant donnée une image(h, w)
2. Filtre passe-bas

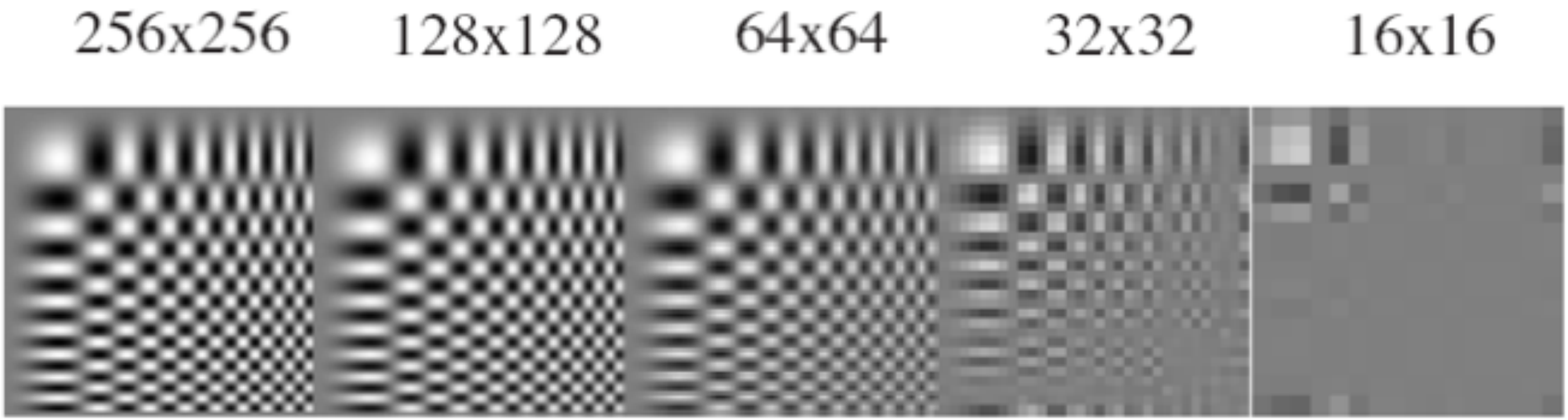
   im_blur = imfilter(image, fspecial(‘gaussian’, 7, 1))

3. Échantillonner un pixel sur deux

   im_small = im_blur(1:2:end, 1:2:end);

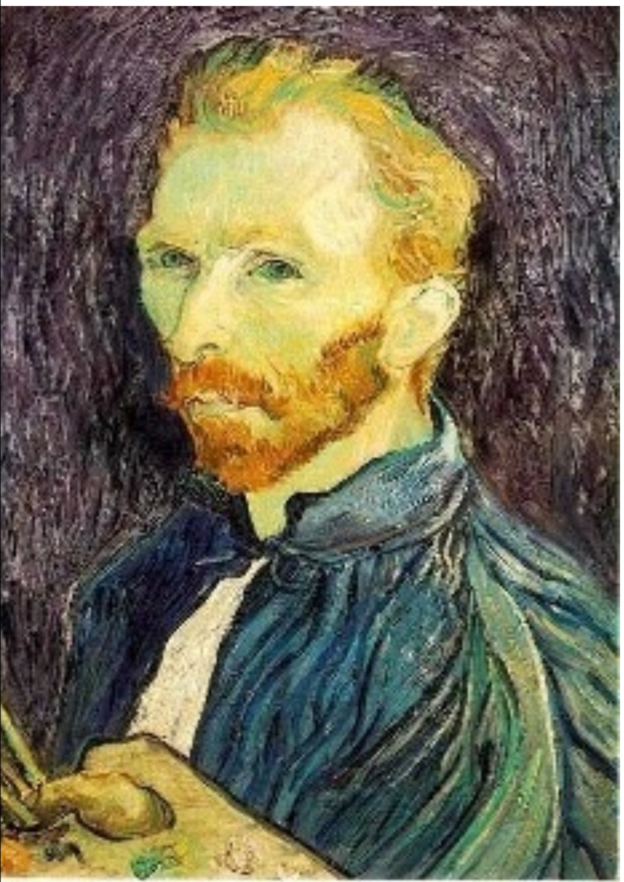
Recouvrement spectral



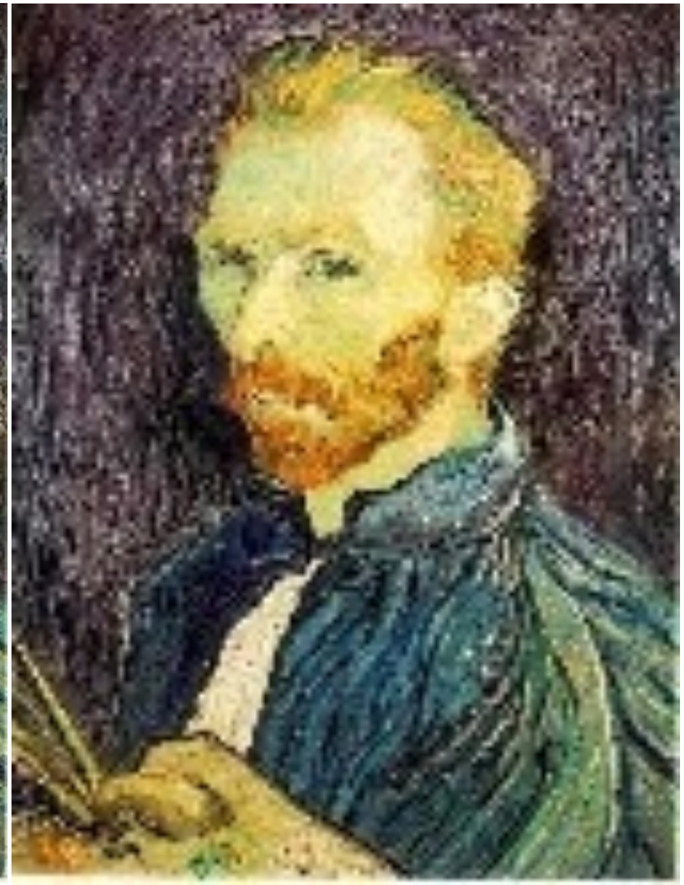


Forsyth and Ponce 2002

Échantillonner sans filtrage



1/2

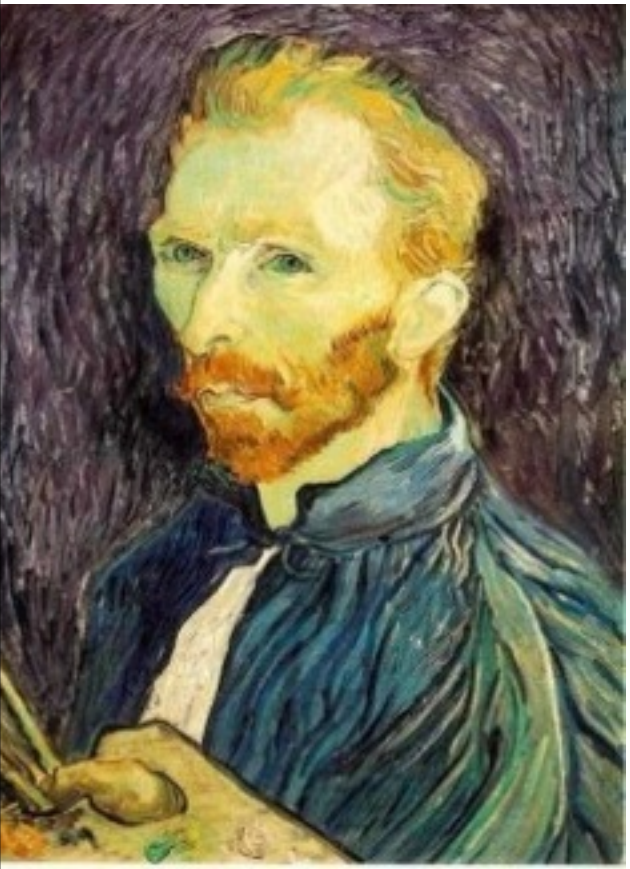


1/4 (2x zoom)

1/8 (4x zoom)

Slide by Steve Seitz

Échantillonner avec filtrage



Gaussian 1/2

G 1/4

G 1/8

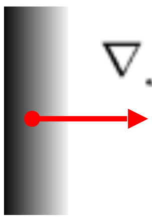
Slide by Steve Seitz

Gradient

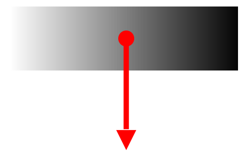
Le gradient d’une image:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

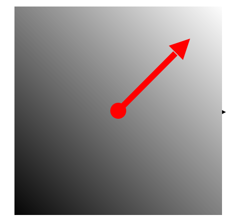
Pointe dans la direction du changement le plus rapide en intensité



$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, 0\right]$$



$$\nabla f = \left[0, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$



$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

La direction est donnée par: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial x}\right)$

- quel est le lien avec la direction de l’arête?

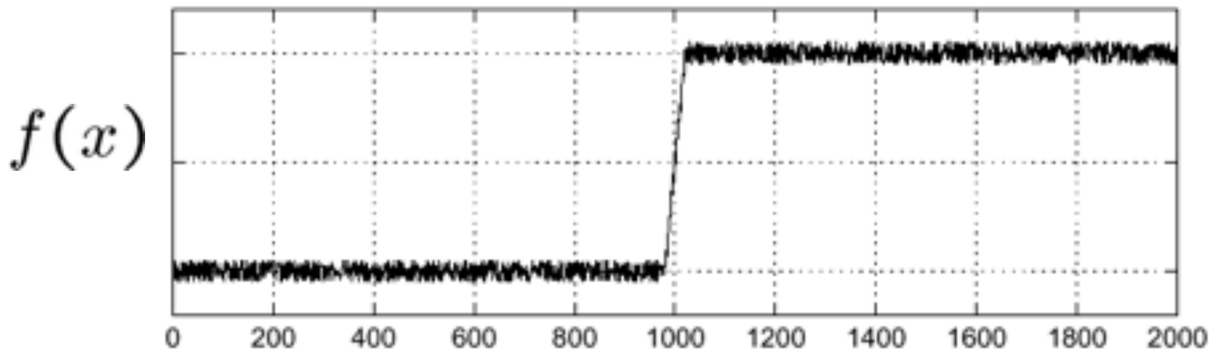
La “force” du gradient est la magnitude:

$$\|\nabla f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

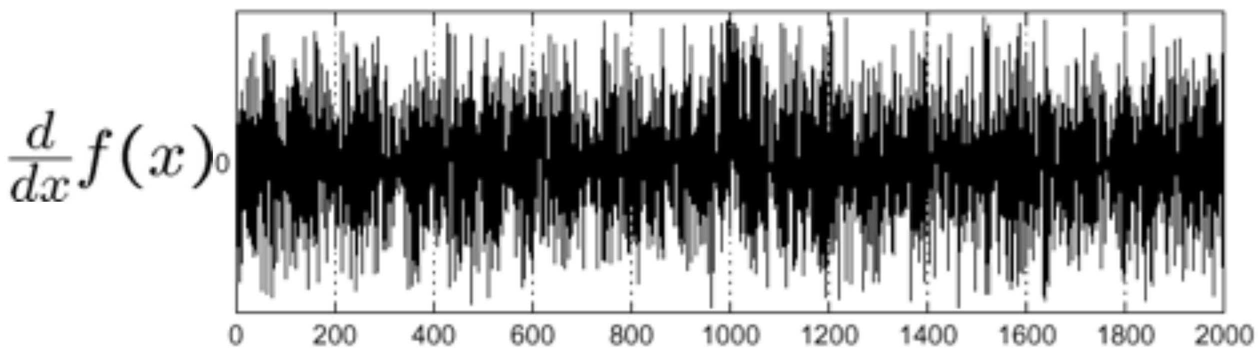
Bruit

Analysons une seule ligne dans l'image

- Affiche l'intensité en fonction de la coordonnée *x*



Comment calculer le gradient (la dérivée?)



Où est l'arête?

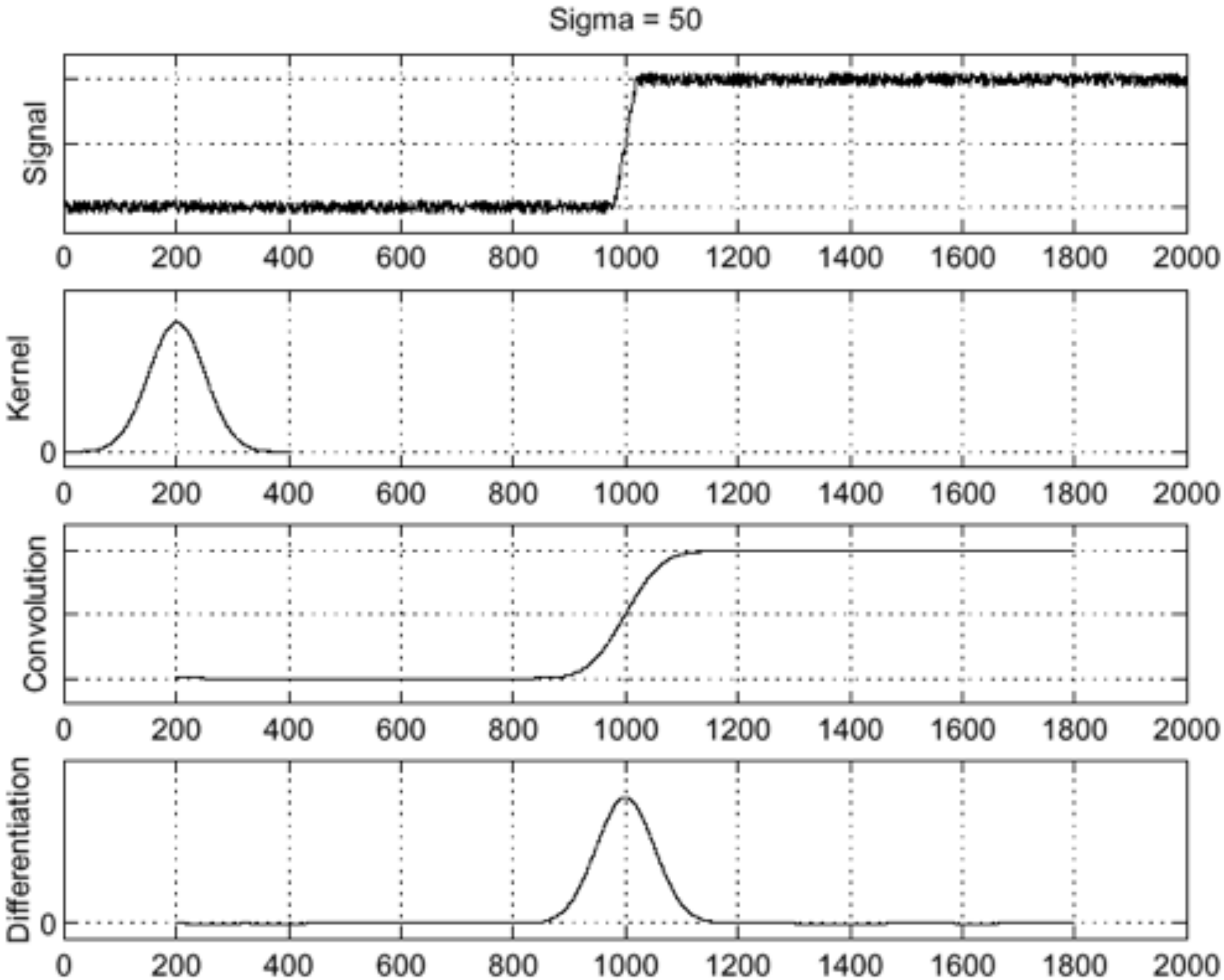
Solution: adoucir! (filtrer!)

f

h

$h \star f$

$\frac{\partial}{\partial x}(h \star f)$



Où est l'arête?

Chercher maximums: $\frac{\partial}{\partial x}(h \star f)$

Théorème sur la dérivée de la convolution

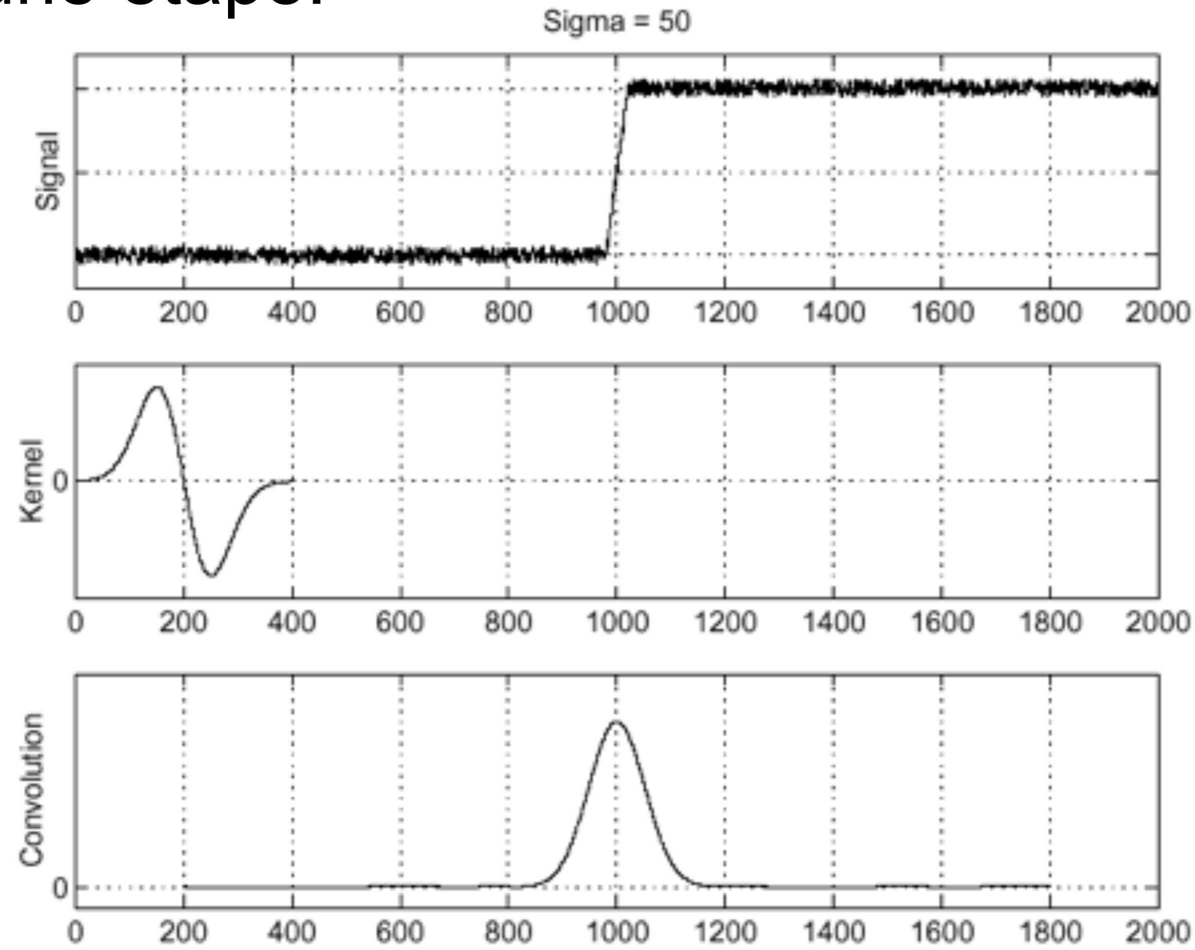
$$\frac{\partial}{\partial x}(h \star f) = (\frac{\partial}{\partial x}h) \star f$$

On sauve une étape:

f

$\frac{\partial}{\partial x}h$

$(\frac{\partial}{\partial x}h) \star f$



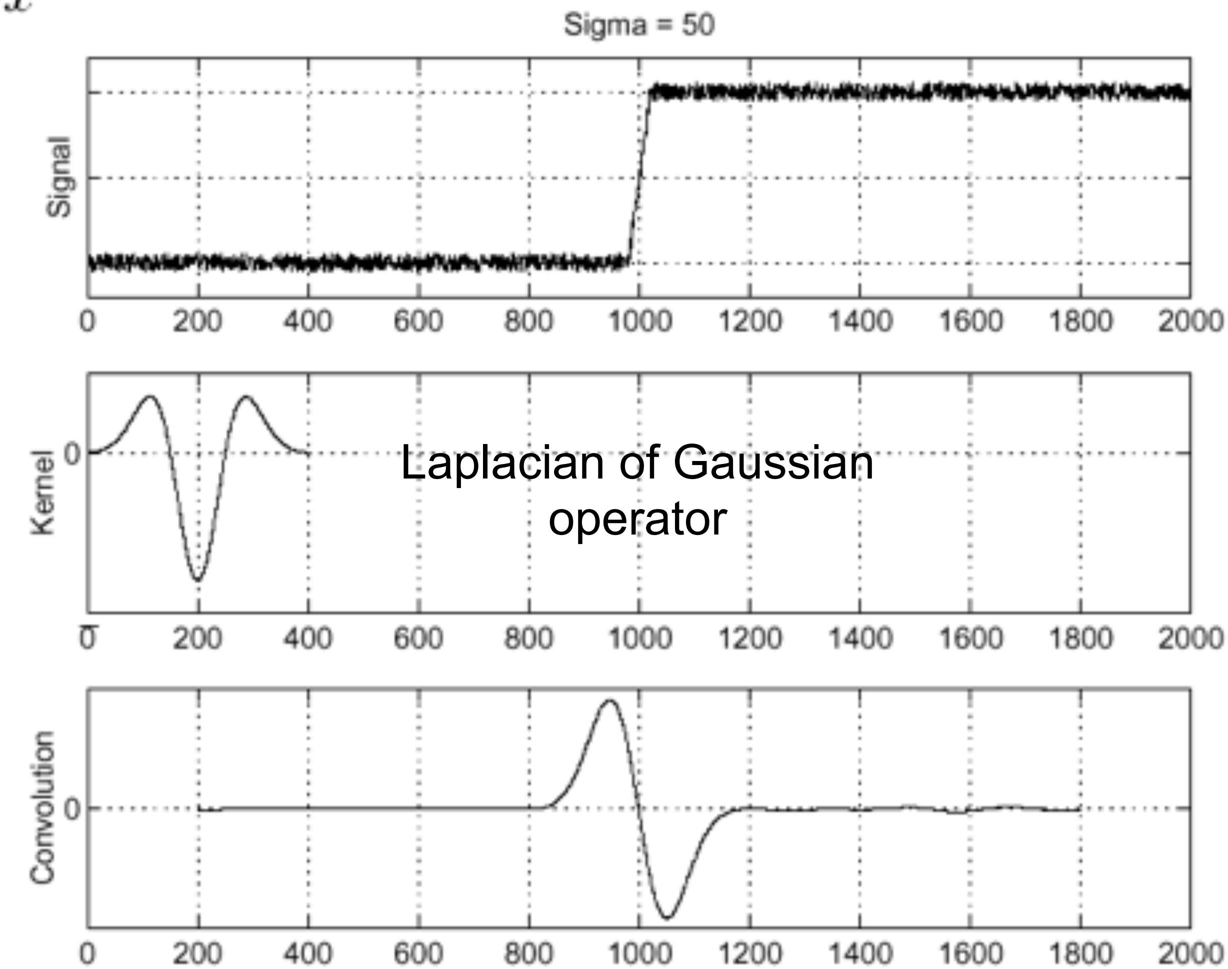
Laplacien d’une gaussienne

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(h \star f)$$

$$f$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}h$$

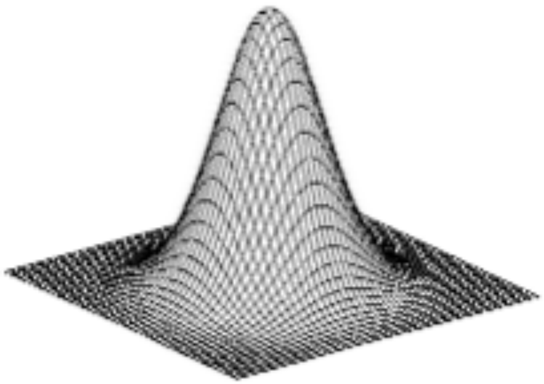
$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}h) \star f$$

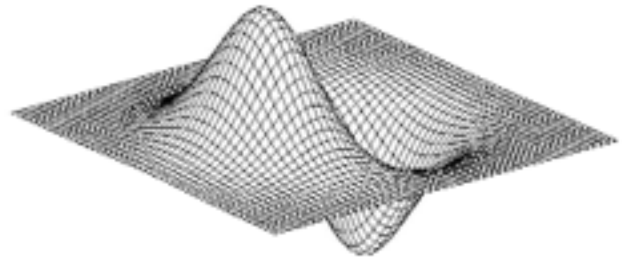


Où est l’arête?

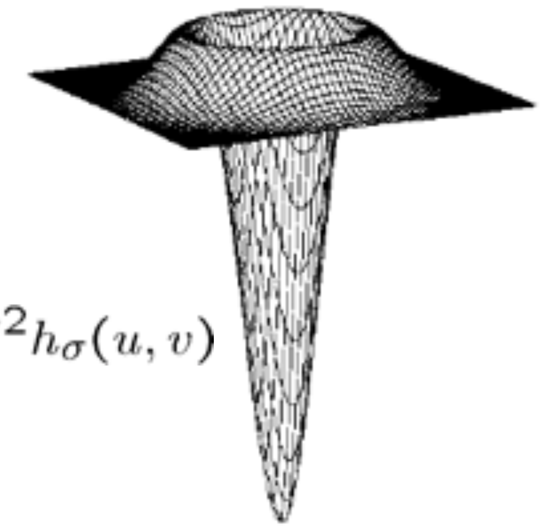
Où le graphe du bas croise 0

Détection d’arête en 2-D





Laplacien d’une gaussienne



Gaussienne

dérivée d’une gaussienne

$$h_\sigma(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} h_\sigma(u,v)$$

$$\nabla^2 h_\sigma(u,v)$$

∇^2 est l’opérateur **Laplacien**:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$