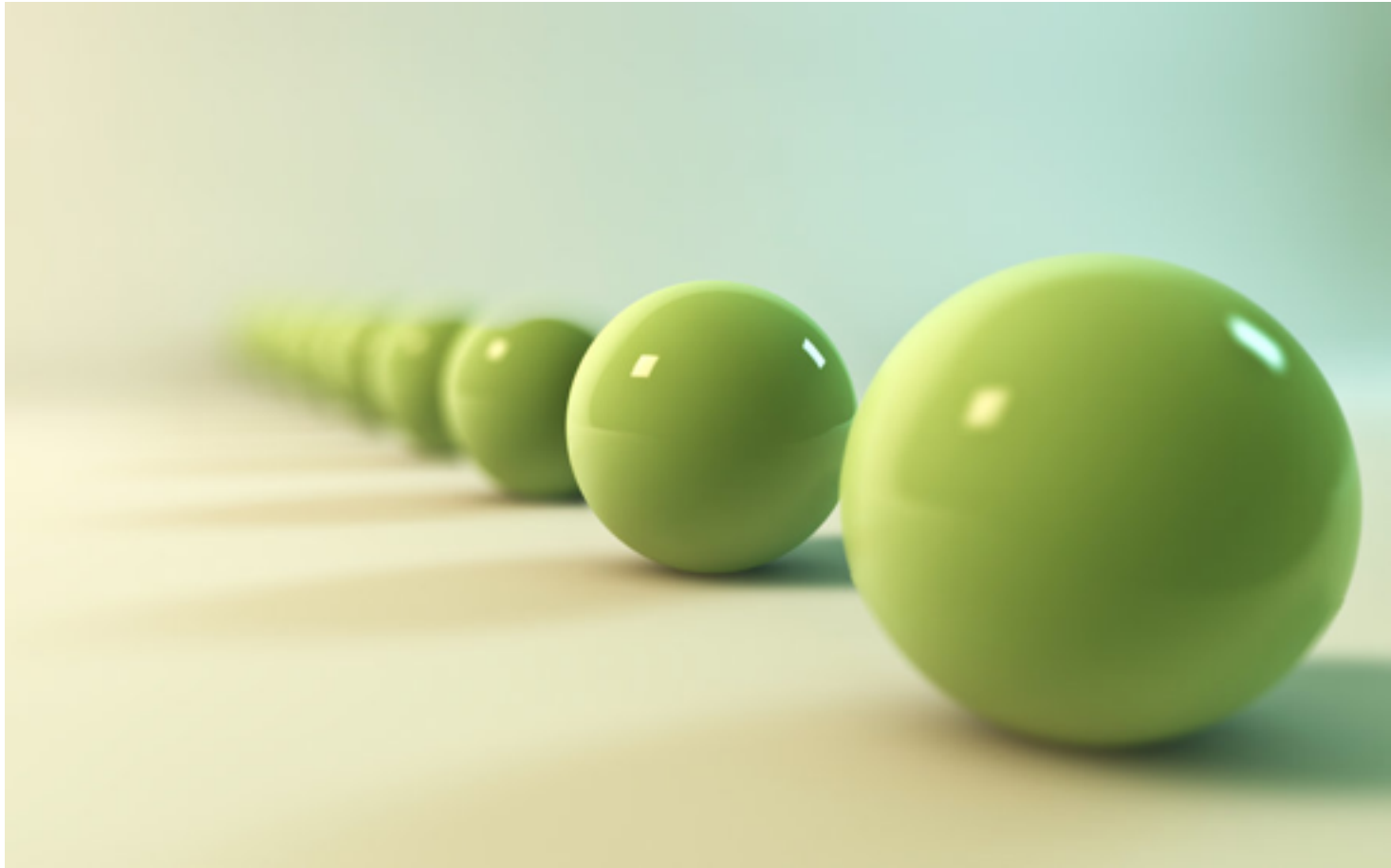


Filtrage dans le domaine spatial



Photographie Algorithmique, H2014

Jean-François Lalonde

Filtrage d'images

- Filtrage: fonction d'un pixel *et de ses voisins*
- Très important!
 - Modifier l'image
 - Réduire le bruit, re-dimensionner, contraste, etc.
 - Extraire de l'information
 - Texture, edges, distinctive points, etc.
 - Detecter des formes
 - “template matching”

Example: “boîte”

$g[\cdot, \cdot]$

	1	1	1
$\frac{1}{9}$	1	1	1
	1	1	1

Filtrage

$$g[\cdot, \cdot] \frac{1}{9}$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

$f[\cdot, \cdot]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$h[\cdot, \cdot]$

$$h[m, n] = \sum_{k, l} g[k, l] f[m + k, n + l]$$

Filtrage

$$g[\cdot, \cdot] \frac{1}{9}$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

$f[\cdot, \cdot]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$h[\cdot, \cdot]$

	0	10							

$$h[m, n] = \sum_{k, l} g[k, l] f[m + k, n + l]$$

Filtrage

$$g[\cdot, \cdot] \frac{1}{9}$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

$f[\cdot, \cdot]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$h[\cdot, \cdot]$

	0	10	20						

$$h[m, n] = \sum_{k, l} g[k, l] f[m + k, n + l]$$

Filtrage

$$g[\cdot, \cdot] \frac{1}{9}$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

$f[\cdot, \cdot]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$h[\cdot, \cdot]$

	0	10	20	30					

$$h[m, n] = \sum_{k, l} g[k, l] f[m + k, n + l]$$

Filtrage

$$g[\cdot, \cdot] \frac{1}{9}$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

$f[\cdot, \cdot]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$h[\cdot, \cdot]$

	0	10	20	30	30				

$$h[m, n] = \sum_{k, l} g[k, l] f[m + k, n + l]$$

Filterage

$$g[\cdot, \cdot] \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f[\cdot, \cdot]$$
[illegible]
$$h[.,.]$$
[illegible]

$$h[m,n] = \sum_{k,l} g[k,l] f[m+k,n+l]$$

Filtrage

$$g[\cdot, \cdot] \frac{1}{9}$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

$f[\cdot, \cdot]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$h[\cdot, \cdot]$

	0	10	20	30	30				
						?			
				50					

$$h[m, n] = \sum_{k, l} g[k, l] f[m + k, n + l]$$

Filtrage

$$g[\cdot, \cdot] \quad \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$f[\cdot, \cdot]$

$h[\cdot, \cdot]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0							
0	0	0							
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	10	20	30	30				
				50					

Qu'est-ce qui se passe, intuitivement?

$$h[m, n] = \sum_{k, l} g[k, l] f[m + k, n + l]$$

Filtrage

$$g[\cdot, \cdot] \quad \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$f[\cdot, \cdot]$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$h[\cdot, \cdot]$

	0	10	20	30	30	30	20	10	
	0	20	40	60	60	60	40	20	
	0	30	60	90	90	90	60	30	
	0	30	50	80	80	90	60	30	
	0	30	50	80	80	90	60	30	
	0	20	30	50	50	60	40	20	
	10	20	30	30	30	30	20	10	
	10	10	10	0	0	0	0	0	

$$h[m, n] = \sum_{k, l} g[k, l] f[m + k, n + l]$$

Filtrage “en boîte” (box filter)

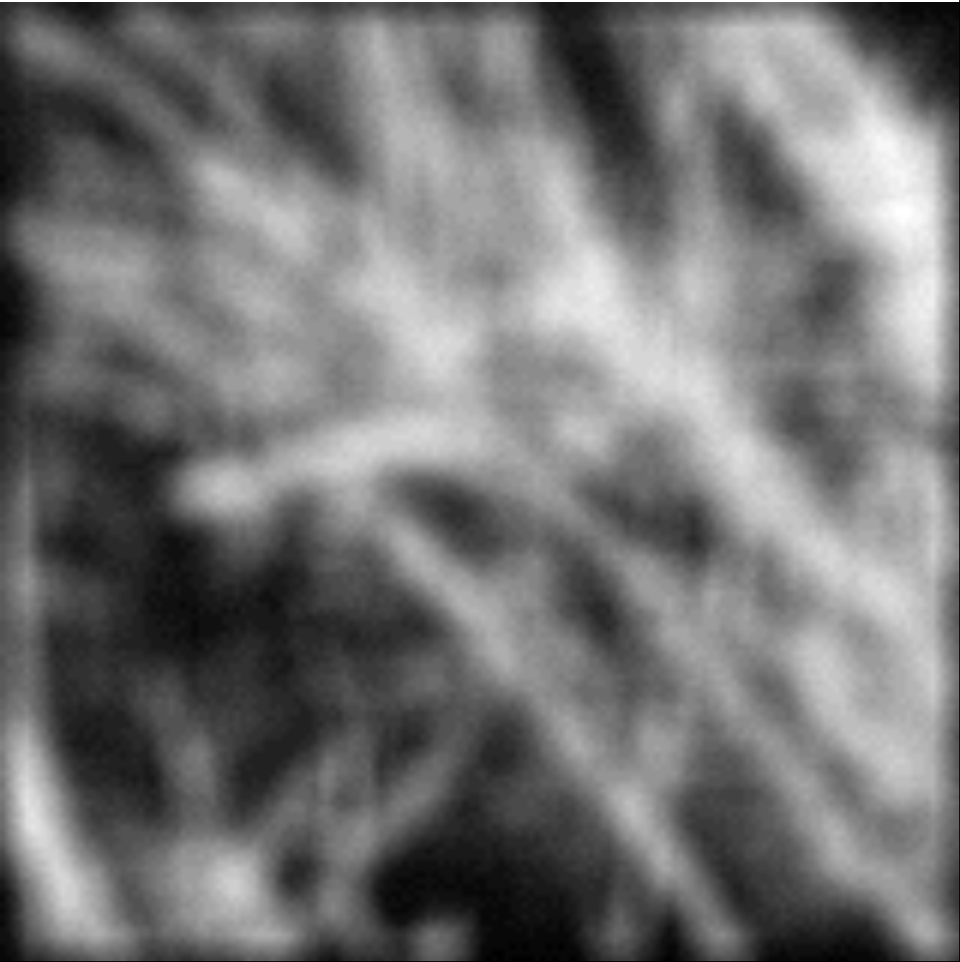
Qu'est-ce qu'il fait?

- Remplace chaque pixel par la moyenne de son voisinage
- On adoucit l'image (enlève les hautes fréquences)

$$\frac{1}{9} g[\cdot, \cdot]$$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

“Atténuer” l’image avec le filtre boîte



Petite pratique avec les filtres linéaires



Originale

0	0	0
0	1	0
0	0	0

?

Petite pratique avec les filtres linéaires



Originale

0	0	0
0	1	0
0	0	0



Résultante
(identique!)

Petite pratique avec les filtres linéaires



Originale

0	0	0
0	0	1
0	0	0

?

Petite pratique avec les filtres linéaires



Originale

0	0	0
0	0	1
0	0	0



À gauche de 1 pixel

Petite pratique avec les filtres linéaires



Originale

0	0	0
0	2	0
0	0	0

—

$\frac{1}{9}$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

?

(Notez que la somme est égale à 1)

Petite pratique avec les filtres linéaires



Originale

0	0	0
0	2	0
0	0	0

—

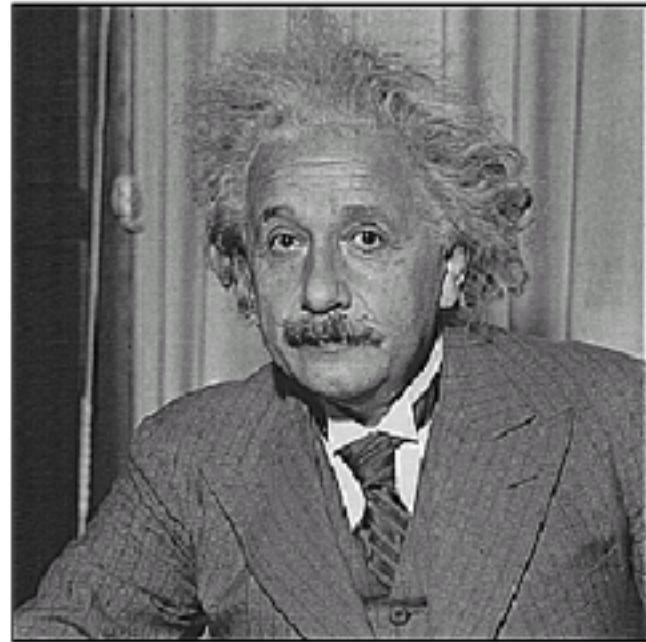
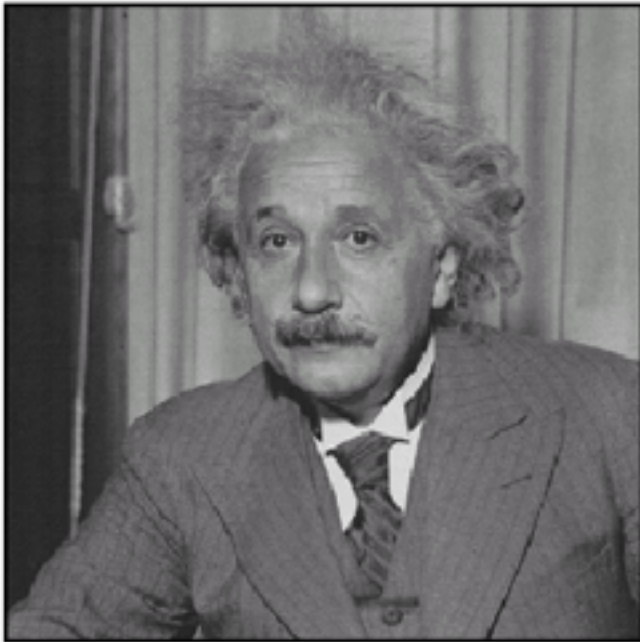
$\frac{1}{9}$

1	1	1
1	1	1
1	1	1

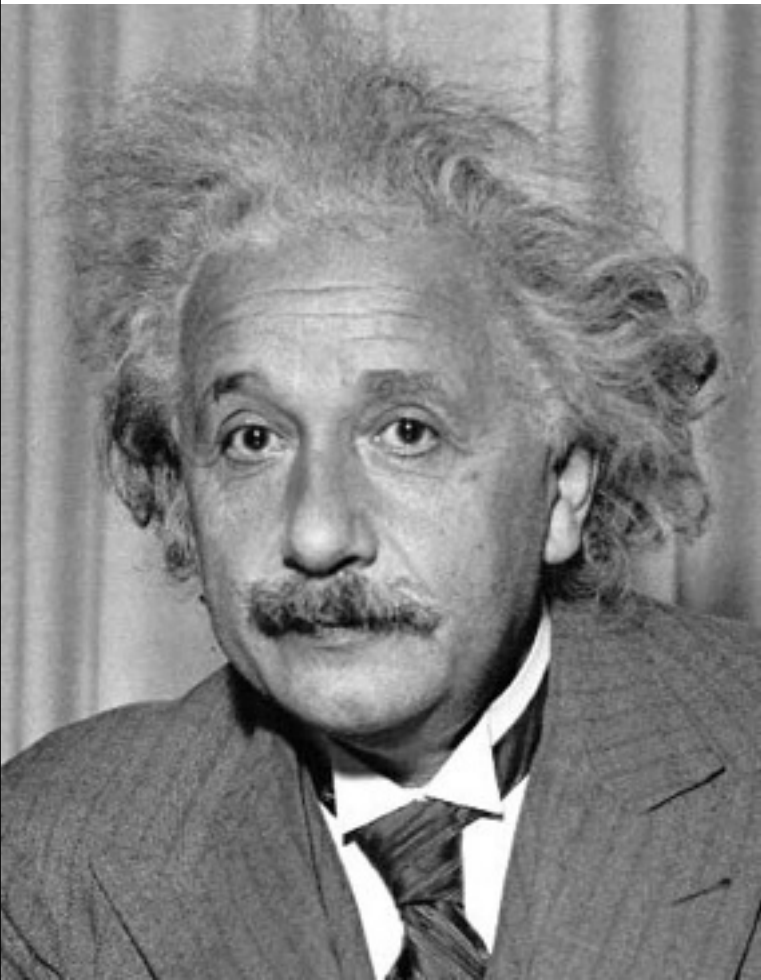


Accentue les différences avec la moyenne

Accentuation “sharpening”

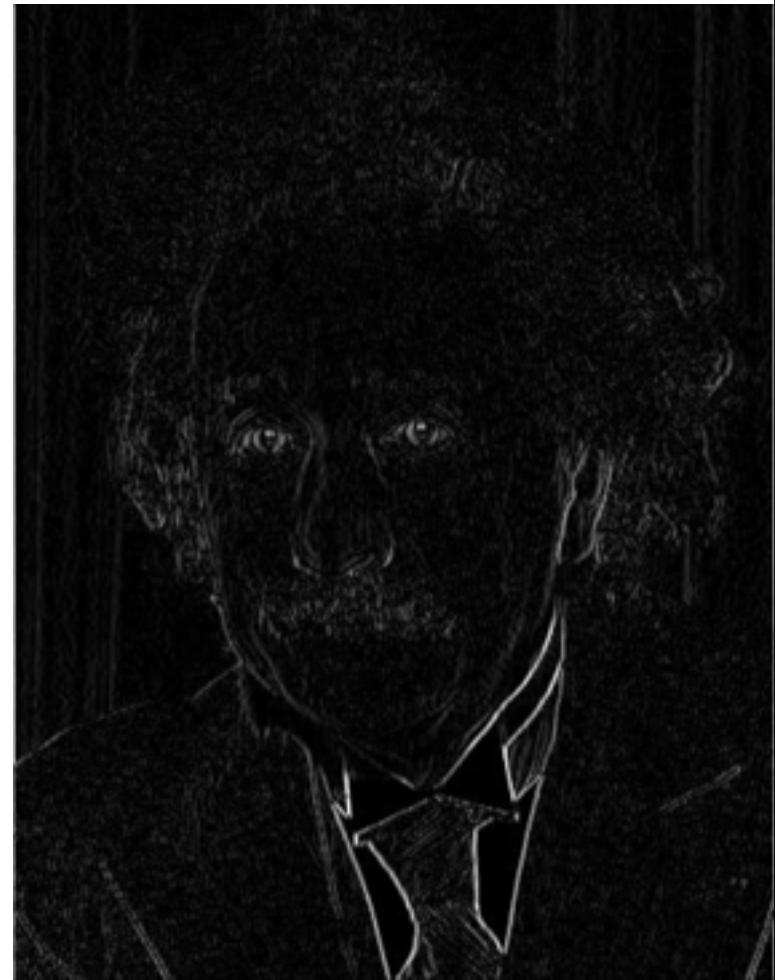


Autres filtres



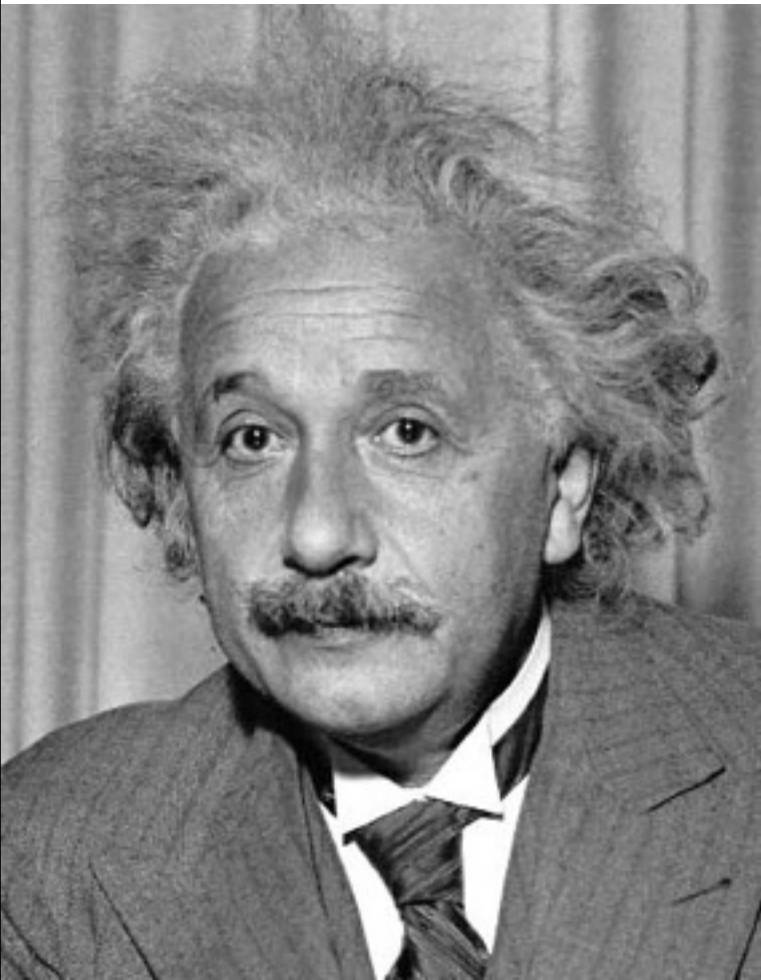
1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1

Sobel



Arêtes verticales
(valeur absolue)

Other filters



1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

Sobel



Arêtes horizontales
(valeur absolue)

Demo

Propriété des filtres linéaires

Linéarité (!):

$$\text{filter}(f_1 + f_2) = \text{filter}(f_1) + \text{filter}(f_2)$$

Invariance aux déplacements: ne dépend pas de l'emplacement du pixel

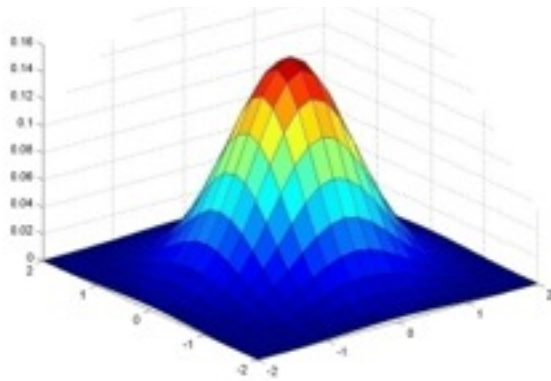
$$\text{filter}(\text{shift}(f)) = \text{shift}(\text{filter}(f))$$

Propriétés des filtres linéaires

- Commutatif: $a * b = b * a$
 - Conceptuellement, on peut traiter l'image comme un filtre
- Associatif: $a * (b * c) = (a * b) * c$
 - Souvent, on applique plusieurs filtres: $((a * b_1) * b_2) * b_3$
 - Équivalent à filtrer l'image avec le "filtre du filtre": $a * (b_1 * b_2 * b_3)$
- Distribution: $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
- Factoriser les scalaires: $ka * b = a * kb = k(a * b)$
- Identité $e = [0, 0, 1, 0, 0]$,
 $a * e = a$

Filtre important: gaussien

- Pondère les contributions des voisins en fonction de leur distance

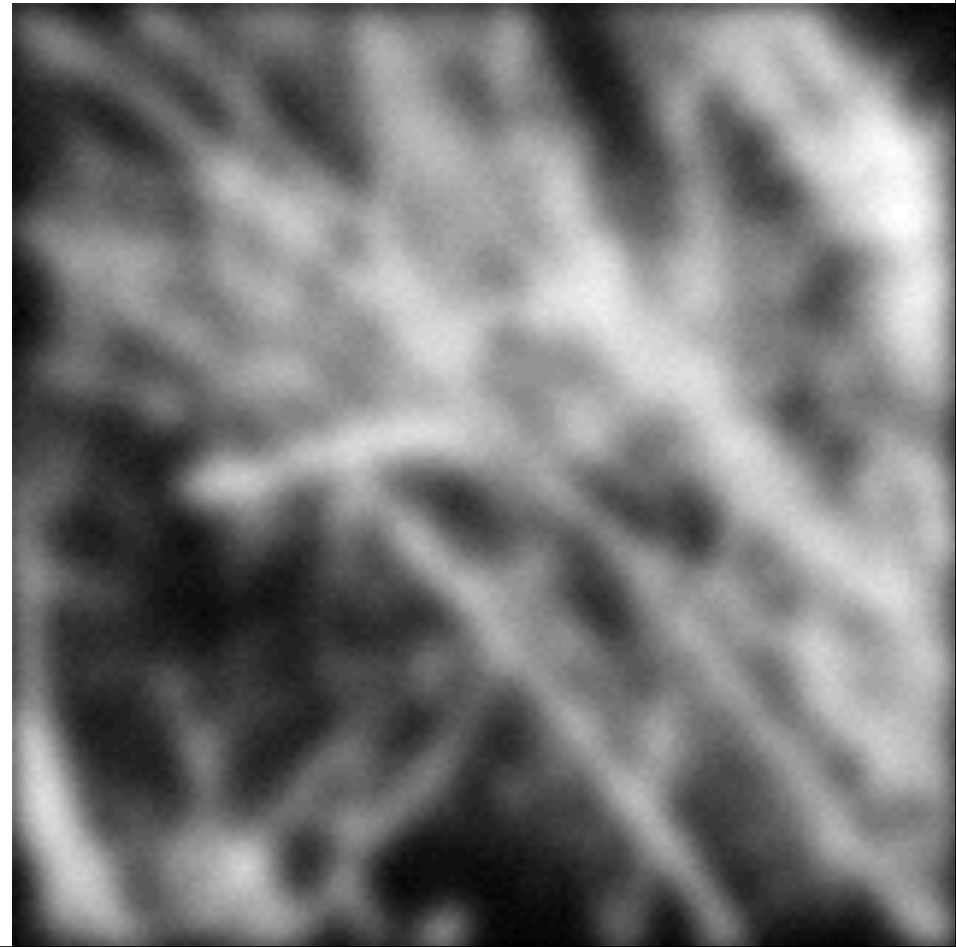


0.003	0.013	0.022	0.013	0.003
0.013	0.059	0.097	0.059	0.013
0.022	0.097	0.159	0.097	0.022
0.013	0.059	0.097	0.059	0.013
0.003	0.013	0.022	0.013	0.003

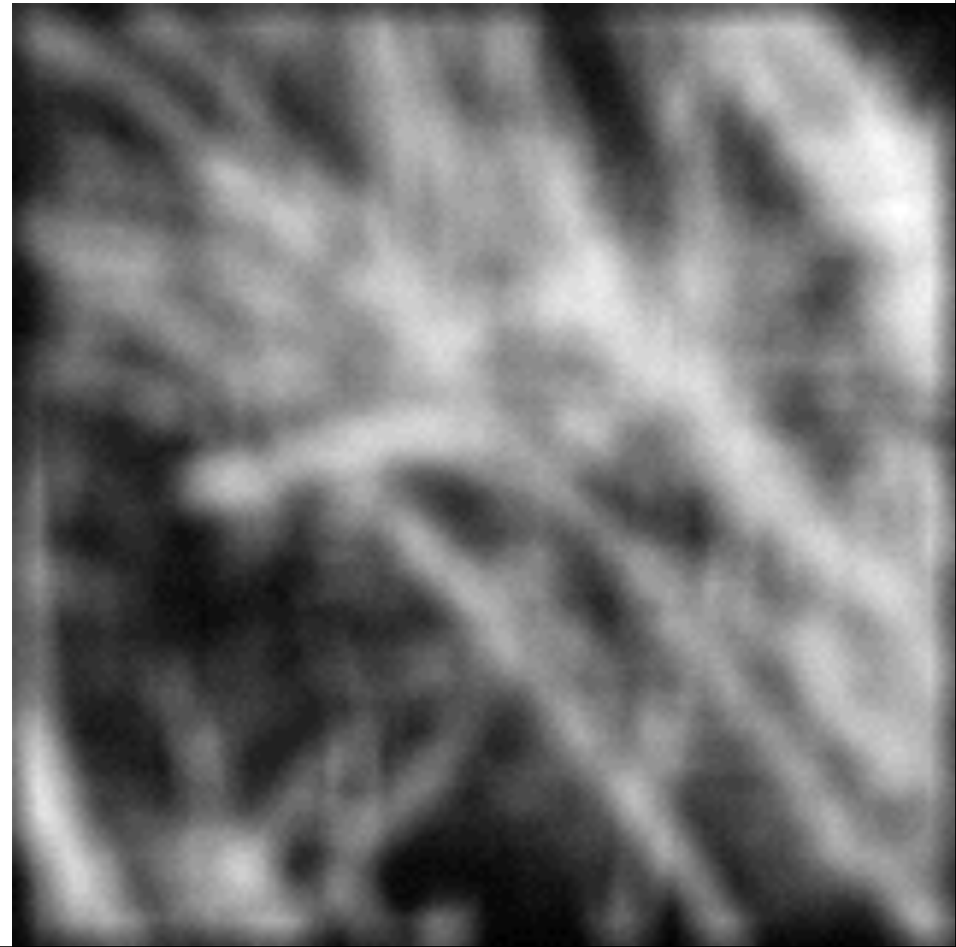
5 x 5, $\sigma = 1$

$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Atténuer avec le filtre gaussien



Atténuer avec le filtre “en boîte”



Filtres gaussiens

- Retire les hautes fréquences de l'image (filtre passe-bas)
 - Les images deviennent plus lisses
- Filter un filtre gaussien avec un autre filtre gaussien?
 - Le résultat est aussi gaussien!
 - Convolver deux fois avec Gaussian kernel of width σ is same as convolving once with kernel of width $\sigma\sqrt{2}$
- *Séparable*
 - filtre gaussien 2D = produit de deux filtres gaussiens 1D

Separability of the Gaussian filter

$$\begin{aligned} G_{\sigma}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \right) \end{aligned}$$

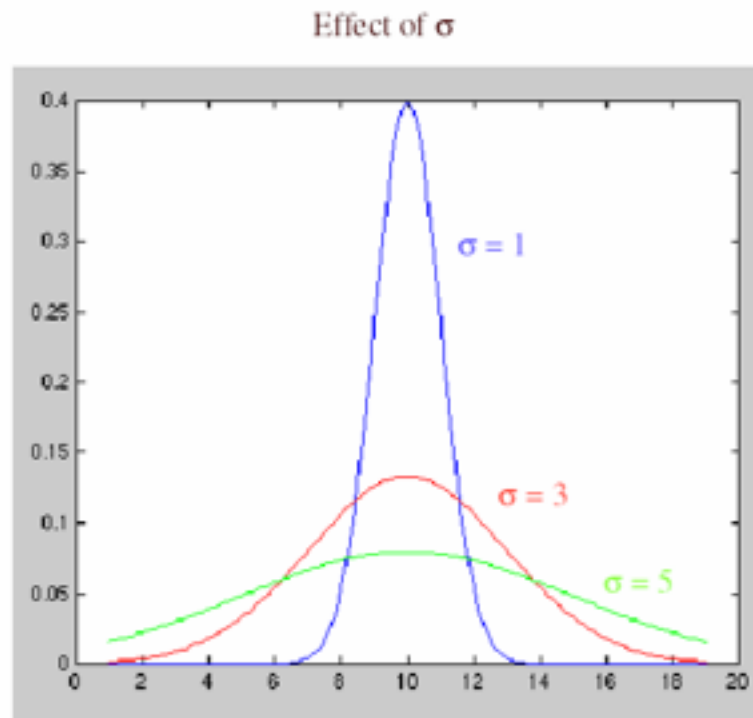
Pourquoi c'est important?

Demo

Considérations pratiques

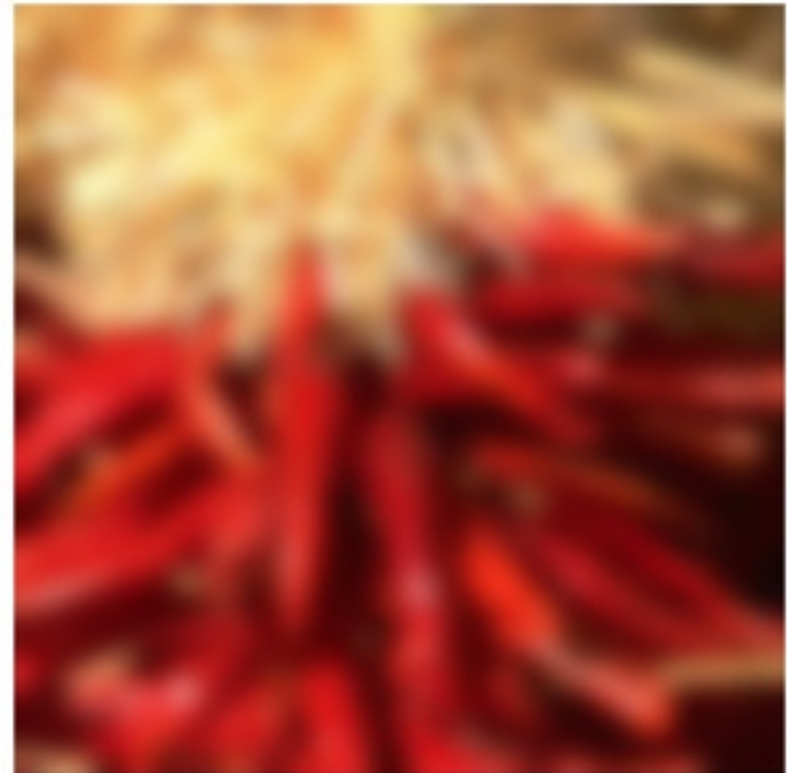
Quelle devrait être la taille du filtre?

- Les valeurs aux extrémités devraient être proche de 0
- Règle empirique: la demie-taille devrait être 3σ



Considérations pratiques

- Bordure de l'image?
 - le filtre dépasse l'image!
 - extrapolation
 - 0
 - “enrouler”
 - répéter
 - réflexion



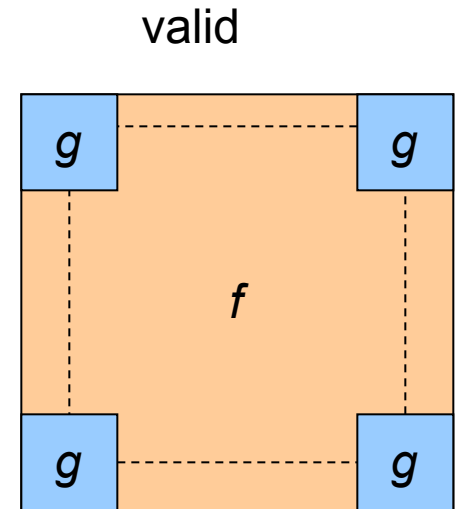
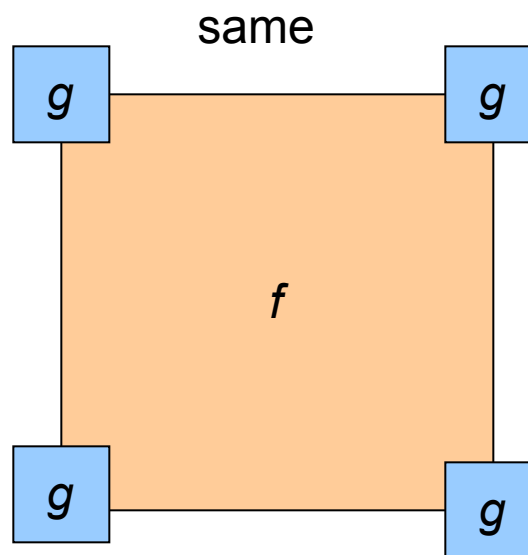
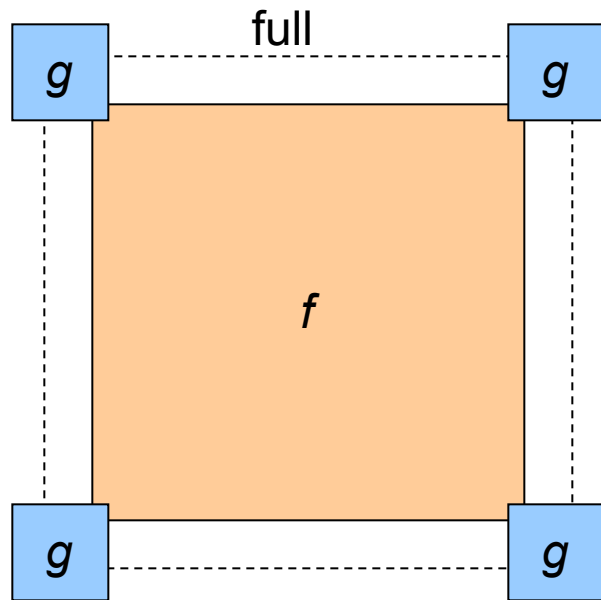
Considérations pratiques

– (MATLAB):

- 0: `imfilter(f, g, 0)`
- “enrouler”: `imfilter(f, g, 'circular')`
- répéter: `imfilter(f, g, 'replicate')`
- réflexion: `imfilter(f, g, 'symmetric')`

Considérations pratiques

- Quelle est la taille de l'image résultante?
- MATLAB: `filter2(g, f, shape)`
 - *shape* = 'full': $\text{size}(f) + \text{size}(g)$
 - *shape* = 'same': $\text{size}(f)$
 - *shape* = 'valid': $\text{size}(f) - \text{size}(g)$



La semaine prochaine: le domaine des fréquences

